## Лабораторная работа № 12

# ИЗУЧЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

**Цель работы:** эмпирическое определение характеристик колебаний физического маятника и оценка ускорения свободного падения.

**Оборудование:** физический маятник, секундомер, линейка.

### Теория

*Колебание* - движение механической системы вблизи устойчивого положения равновесия. *Периодическим* называется колебание, при котором значения изменяющихся физических величин повторяются через равные промежутки времени. *Физическим маятником* называется любое твердое тело, которое может совершать колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс тела. В данной работе в качестве физического маятника используется длинный однородный металлический стержень массы $m$ (рис 1). Для определения положения закрепления (точки подвеса) на стержень нанесена шкала.

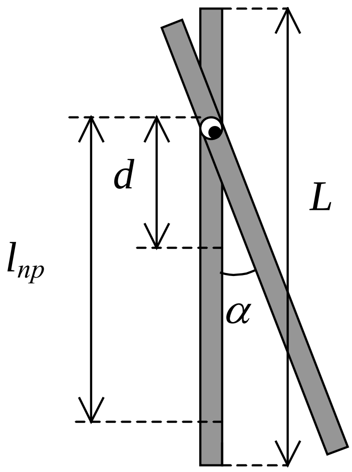


Рис. 1.

В равновесии центр масс маятника находится на одной вертикали с осью вращения. При отклонении тела на угол $\alpha$ возникает возвращающий момент силы тяжести

$$M = -mgd\sin\alpha ,$$

где $d$ - расстояние от центра масс до точки подвеса.

В соответствии с основным уравнением динамики вращательного движения

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = M ,$$

где $I$ – момент инерции физического маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса,

и считая, что при малых отклонениях от положения равновесия $\sin\alpha \approx \alpha$, имеем

$$I\ddot{\alpha} + mgd\alpha = 0. \qquad (1)$$

Разделив это уравнение на $I$, получим дифференциальное уравнение свободных малых колебаний физического маятника:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0 ,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mgd}{I}}$ – собственная циклическая частота колебаний физического маятника.

Период колебания определяется формулой

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}. \qquad (2)$$

Обозначим момент инерции физического маятника относительно центра масс через $I_0$. Тогда, согласно теореме Гюйгенса-Штейнера, момент инерции физического маятника относительно точки подвеса равен

$$I = I_0 + md^2. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + md^2}{mgd}}. \qquad (4)$$

Момент инерции однородного стержня относительно центра масс определяется выражением

$$I_0 = \frac{mL^2}{12} = md_0^2,$$

где $d_0$ называют радиус инерции.

Тогда вместо (4) можно записать

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d_0^2 + d^2}{dg}}. \qquad (5)$$

Частным случаем физического маятника является *математический маятник* – маятник, вся масса которого сосредоточена в одной точке – в центре масс маятника. Прообразом математического маятника может служить шарик, подвешенный на длинной нити. В случае математического маятника

$$d = l, \quad I = ml^2,$$

где $l$ – длина математического маятника,
и формула (2) переходит в

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (6)$$

Длину математического маятника, период которого совпадает с периодом физического маятника, называют *приведенной длиной* физического маятника $l_{пр}$:

$$l_{пр} = \frac{I}{md} = d + \frac{I_0}{md}, \qquad (7)$$

тогда формула для периода колебаний физического маятника аналогична (6)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{пр}}{g}}.$$

*Центром качания* физического маятника называется точка, расположенная на прямой, проходящей через точку подвеса и центр масс, на расстоянии $l_{пр}$ от точки подвеса. Также центр качания можно определить как геометрическую точку, в которой надо сосредоточить всю массу физического маятника, чтобы период его колебаний остался без изменений.

Из (7) видно, что центр качания лежит дальше от оси вращения, чем центр масс.

Точка подвеса и центр качания являются взаимно обратимыми или сопряженными точками. Если маятник подвесить за центр качания, то его период не изменится и прежняя точка подвеса сделается новым центром качания.

Как видно из (4), величина периода колебания исследуемого маятника является сложной функцией $d$. График этой зависимости изображен на рис.2. При $d \to 0$ период $T$ стремится к бесконечности по закону $d^{-1/2}$. При $d = 0$ маятник будет находиться в состоянии безразличного равновесия и потеряет способность совершать колебания ($T \to \infty$). При $d \to \infty$ он стремится к бесконечности как $d^{1/2}$. Период минимален при $d = d_0 = \sqrt{\dfrac{I_0}{m}}$. При $T > T_{min}$ (рис.2) каждое значение $T$ достигается при двух различных значениях $d$: $d_1$ и $d_2$ – одно из них больше, а другое меньше $d_0$, при чем $l_{пр} = d_1 + d_2$.

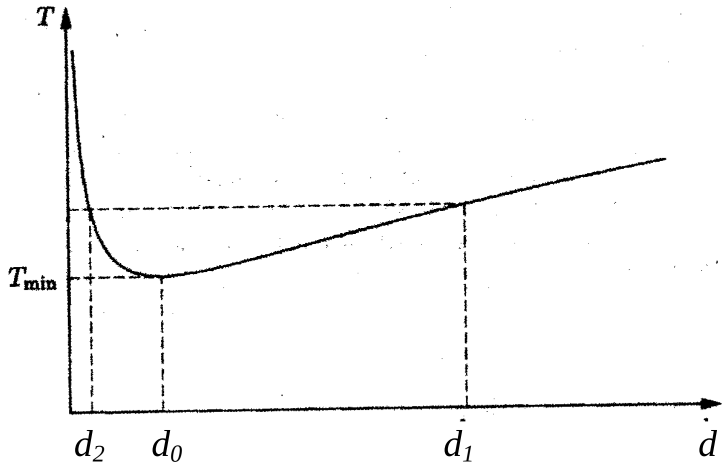

Рис.2.

Рассмотренная теория физического маятника является приближенной, поскольку она основана на упрощающих допущениях:

1. малости амплитуды колебаний ($\sin\alpha \approx \alpha$).

Если использовать следующий член ряда в разложении $\sin\alpha = \alpha - \dfrac{1}{3}\alpha^3 + ...$, то период колебаний маятника будет зависеть от амплитуды $\alpha_m$ по закону $T = T_0\left(1 + \dfrac{\alpha_m^2}{16}\right)$, где $T_0$ – период малых колебаний, независящий от амплитуды. Заранее указать величину амплитуды, при которой можно пользоваться линейным приближением, невозможно, так как она зависит от точности измерения периода.

2. пренебрежении моментом сил трения.

Оценка изменения периода колебаний за счет сил трения: для установки, используемой в лабораторной работе, маятник совершает более $N$ = 100 колебаний, пока его амплитуда не уменьшится в $e$ раз. В этом случае относительное изменение периода колебаний за счет сил трения $\dfrac{\Delta T}{T} \approx \dfrac{1}{4\pi^2 N^2} \approx 10^{-6}$, т.е. влиянием сил трения можно пренебречь.

## Выполнение работы

1. Аккуратно снимите физический маятник, измерьте его длину $L$ и с помощью опорной призмы определите координату центра масс.

2. Закрепите маятник на нулевом делении шкалы. Установите диапазон амплитуд, в пределах которого период колебания маятника можно считать независимым от амплитуды. Для этого отклоните маятник примерно на $20^0$, и с помощью секундомера найдите время $t$ десяти полных колебаний ($n$ = 10). Вычислите период колебаний $T = \frac{t}{n}$ физического маятника. Затем постепенно уменьшайте амплитуду до тех пор, пока измеряемые периоды колебаний перестанут отличаться друг от друга. Результаты измерений внесите в табл.1.

Таблица 1.

| № | $\alpha$, град | $n$ | $t$, с | $T$, с |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 10 | | |
| 2 | 15 | | | |
| 3 | 10 | | | |
| 4 | 5 | | | |

3. Отклоните маятник на $15^0$ и измерьте период его колебаний

4. Смещая крепление вдоль стержня на 1,5–3 см, повторите измерения периода колебаний $T$ для десяти значений $d$. Результаты измерений внесите в табл. 2.

5. Постройте график функции $d \cdot T^2$ от величины $d^2$.

6. Проведите прямую линию $y = kx + b$ через совокупность экспериментальных точек и найдите тангенс угла наклона $tg\alpha$ графика.

Согласно (5)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d_0^2 + d^2}{dg}},$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{d_0^2 + d^2}{dg} = \frac{4\pi^2}{g} d + \frac{4\pi^2 d_0^2}{dg},$$

умножим обе части равенства на $d$

$$dT^2 = \frac{4\pi^2}{g} d^2 + \frac{4\pi^2 d_0^2}{g}.$$

Обозначая

$$y = dT^2, \quad x = d^2, \quad k = \frac{4\pi^2}{g}, \quad b = \frac{4\pi^2 d_0^2}{g},$$

получим линейную зависимость $d \cdot T^2$ от величины $d^2$: $y = kx + b$.

7. Зная тангенс угла наклона $tg\alpha$ экспериментальной прямой, вычислите ускорение свободного падения $g$ по формуле:

$$k = tg\alpha = \frac{4\pi^2}{g}, \quad \Rightarrow \quad g = \frac{4\pi^2}{tg\alpha}.$$

8. Определите координату $b$ пересечения прямой с осью $Oy$ и найдите радиус инерции маятника $d_{0\ граф}$ по формуле:

$$b = \frac{4\pi^2 d_0^2}{g} = k \cdot d_0^2, \quad \Rightarrow \quad d_{0\ граф} = \sqrt{\frac{b}{k}}\,.$$

9. Сравните $d_{0\ граф}$ с радиусом инерции $d_{0изм}$, определенным из непосредственных измерений по формуле

$$d_{0\ изм} = \frac{L}{\sqrt{12}}\,.$$

10. Для 2-3 значений $d$ вычислите величину $l_{пр}$ и на опыте проверьте обратимость точки подвеса и центра качания.

11. Результаты измерений занесите в табл. 2.

Таблица 2.

| № | $d$, м | $T$, с | $d^2$, м$^2$ | $d \cdot T^2$, $мс^2$ | $d_{0\ граф}$, м | $d_{0\ изм}$, м | $g$, м/с$^2$ | $l_{пр}$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| … | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | |

***Для студентов кафедры физики и микроэлектроники:*** в п.п.6-8 экспериментальные данные аппроксимируйте прямой линией методом наименьших квадратов (Приложение 5).

## Контрольные вопросы:

1. От чего зависит период колебаний физического маятника?
2. Каким дифференциальным уравнением описываются линейные колебания физического маятника?
3. Что называется радиусом инерции тела?
4. С чем связано понятие “приведенная длина” физического маятника?
5. Чему равен период колебаний, если ось вращения проходит через центр масс тела?
6. При каком расстоянии от центра масс до точки подвеса период колебаний маятника минимален?
7. При каком условии амплитуда колебаний физического маятника не влияет на его период?
8. Как изменится период колебаний, если к концу стержня присоединить дополнительную массу?

## Литература:


1. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности . - М.: Наука, 1986.
2. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Том 1. Механика. - М.: Наука, 1989.
3. Хайкин С. Э. Физические основы механики. - М.: Наука, 1971.

*Приложение 5*

## Метод наименьших квадратов

Для аппроксимации экспериментальных данных используют метод наименьших квадратов, который требует минимума суммы квадратов отклонений табличных точек от заданной функциональной зависимости. Например, в случае линейной зависимости $y = ax + b$ неизвестные коэффициенты $a$ и $b$ определяются условиями минимума функции

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left[ y_i - (a + bx_i) \right]^2 ,$$

(где $x_i$ и $y_i$ – координаты экспериментальных точек, $n$ – их количество):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial b} = 0 \end{cases}.$$

В результате решения этой системы уравнений получим:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2},$$

$$b = \bar{y} - a \cdot \bar{x} = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2},$$

где $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, $\bar{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y}{n}$.

В общей теории аппроксимации табличных функций показывается, что данное приближение является наилучшим.

## Образец выполнения лабораторной работы № 12.

Длина физического маятника равна $L$ = 70,5 см = 0,705 м.

Начальная амплитуда $\alpha = 15^0$.

Измерим период колебаний маятника при десяти различных положениях точки подвеса и результаты представим в виде таблицы:

| № | $d$, м | $T$, с | $d^2$, м$^2$ | $d \cdot T^2$, $мс^2$ | $d_{0\ граф}$, м | $d_{0\ изм}$, м | $g$, м/с$^2$ | $l_{пр}$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,339 | 1,352 | 0,115 | 0,619 | | | | |
| 2 | 0,319 | 1,333 | 0,102 | 0,558 | | | | |
| 3 | 0,299 | 1,327 | 0,089 | 0,526 | | | | |
| 4 | 0,279 | 1,295 | 0,078 | 0,467 | | | | |
| 5 | 0,259 | 1,283 | 0,067 | 0,426 | | | | |
| 6 | 0,239 | 1,275 | 0,057 | 0,388 | | | | |
| 7 | 0,219 | 1,267 | 0,048 | 0,351 | | | | |
| 8 | 0,199 | 1,270 | 0,040 | 0,320 | | | | |
| 9 | 0,179 | 1,272 | 0,032 | 0,289 | | | | |
| 10 | 0,159 | 1,280 | 0,025 | 0,260 | | | | |

Построим график зависимости $d \cdot T^2$ от $d^2$ (рис. 3) и аппроксимируем полученную зависимость прямой линией.

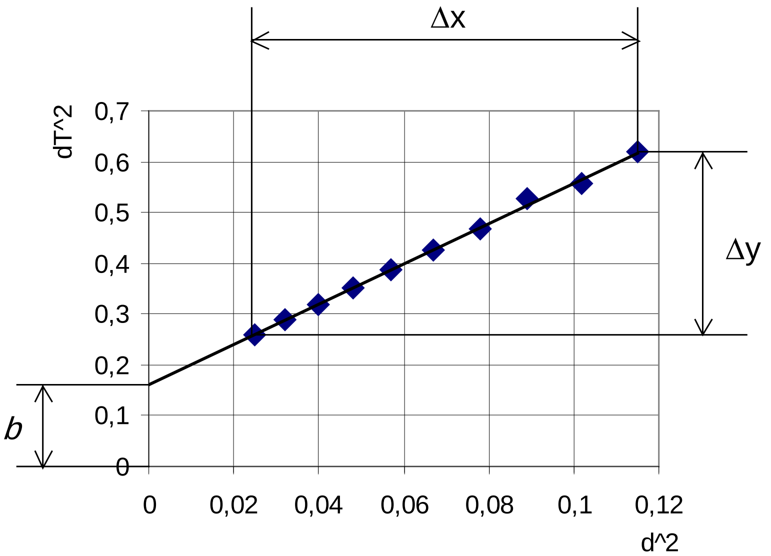


Рис. 3.

Тангенс угла наклона экспериментальной прямой равен $tg\alpha = k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0,622 - 0,260}{0,115 - 0,025} = 4.02$. Следовательно, ускорение свободного падения $g$ равно $g = \dfrac{4\pi^2}{k} = \dfrac{4 \cdot 9,98696}{4,02} = 9,82\ м/с^2$. Определим координату пересечения прямой с осью $Oy$ и радиус инерции маятника $d_{0\ граф}$

$$b = 0{,}16; \quad \Rightarrow \quad d_{0\ граф} = \sqrt{\frac{0{,}16}{4{,}02}} = 0{,}200\ м = 20{,}0\ см.$$

Теоретический радиус инерции равен $d_{0\ изм} = \frac{L}{\sqrt{12}} = \frac{0{,}705}{\sqrt{12}} = 0{,}204\ м = 20{,}4\ см$

Для 2-3 значений $d$ вычислим приведенную длину $l_{пр}$ и проверим на опыте обратимость точки подвеса и центра качания.

Результаты измерений и вычислений представим в виде окончательной таблицы:

<table>
<tr><th>№</th><th>$d$, м</th><th>$T$, с</th><th>$d^2$, м$^2$</th><th>$d \cdot T^2$, $мс^2$</th><th>$d_{0\ граф}$, м</th><th>$d_{0\ изм}$, м</th><th>$g$, м/с$^2$</th><th>$l_{пр}$, м</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0,339</td><td>1,352</td><td>0,115</td><td>0,619</td><td rowspan="10">0,200</td><td rowspan="10">0,204</td><td rowspan="10">9,82</td><td>0,458</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,319</td><td>1,333</td><td>0,102</td><td>0,558</td><td>0,446</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,299</td><td>1,327</td><td>0,089</td><td>0,526</td><td>0,434</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,279</td><td>1,295</td><td>0,078</td><td>0,467</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,259</td><td>1,283</td><td>0,067</td><td>0,426</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,239</td><td>1,275</td><td>0,057</td><td>0,388</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,219</td><td>1,267</td><td>0,048</td><td>0,351</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>0,199</td><td>1,270</td><td>0,040</td><td>0,320</td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td>0,179</td><td>1,272</td><td>0,032</td><td>0,289</td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>0,159</td><td>1,280</td><td>0,025</td><td>0,260</td><td></td></tr>
</table>