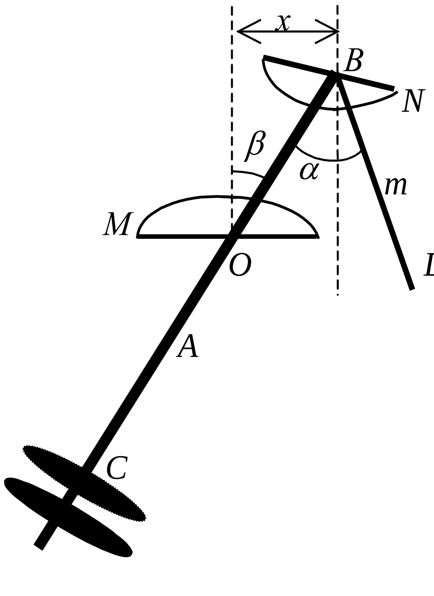
Лабораторная работа № 13

ИЗУЧЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА С ДВИЖУЩЕЙСЯ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

Цель работы: исследование колебаний и определение основных характеристик колебаний физического маятника, возбуждаемых инерционным способом.

Оборудование: два физических маятника, массивные чечевицы, градуированные линейки, секундомер.

Описание установки



В настоящей работе используются два маятника (рис.1): большой физический маятник, состоящий из стержня *A* и двух массивных чечевиц *C*, и малый маятник в виде стальной спицы *BD*. Опираясь призмой в точке *O* на подставку, большой маятник совершает колебания в вертикальной плоскости. Угол β отклонения от вертикали стержня *A* определяется по шкале *M*. Период колебаний большого маятника изменяют перемещением чечевиц по стержню или смещением положения его закрепления (точки *O*). При колебаниях большого маятника малый маятник, подвешенный в точке *B* на расстоянии $L = OB$ от оси вращения большого маятника, совершает вынужденные колебания. Если угол отклонения большого маятника мал, то точку подвеса *B* малого маятника можно считать движущейся вдоль горизонтальной прямой по гармоническому закону $x = b\sin\beta = \beta_0 L \sin\omega t$, где β_0 – начальный угол отклонения большого маятника. Колебания большого маятника считаем незатухающими. Тогда после установления вынужденных колебаний малого маятника по шкале *N* производится отсчет угловой амплитуды α_0 колебаний малого маятника.

Начальное отклонение β_0 большого маятника от положения равновесия при проведении всех измерений должно быть строго неизменным.

Теория

Колебаниями называют движение механической системы вблизи устойчивого положения равновесия. Если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебания, повторяются через равные промежутки времени, то колебание называется *периодическим*. При наличии сил трения незатухающие колебания реализуются под действием внешней переменной силы. Работа этой силы восполняет убыль энергии колеблющегося тела, которая идет на преодоление трения.

Малый маятник, будучи выведенным из положения равновесия, совершает свободные гармонические колебания под действием возвращающего момента M силы тяжести, определенного относительно оси, перпендикулярной плоскости колебаний и проходящей через точку подвеса

$$M = -mgl\sin\alpha \approx -mgl\alpha$$

где m – масса малого маятника, l – расстояние от центра масс до точки подвеса B, знак минус учитывает, что момент M препятствует отклонению.

Момент $M_{тр}$ силы сопротивления среды пропорционален угловой скорости и «тормозит» движение

$$M_{тр} = -h\frac{d\alpha}{dt} = -h\dot{\alpha},$$

где h – коэффициент сопротивления среды.

В данной работе рассматриваются малые колебания маятника, точка подвеса которого сама совершает гармонические колебания. Для рассмотрения колебаний такого маятника удобно перейти в неинерциальную систему отсчета, в которой точка подвеса будет неподвижной, а внешней вынуждающей силой является сила инерции, момент которой равен

$$M_{инер} = -ml\ddot{x},$$

где x – смещение точки подвеса из положения равновесия в инерциальной системе отсчета, l – расстояние, зависящее от вида маятника (если маятник - стержень, то l равно половине его длины).

Точка подвеса B движется прямолинейно по закону

$$x = b\sin\beta = b\sin\omega t,$$

где $b = \beta_0 L$ -амплитуда смещения точки подвеса B, β_0 – начальный угол отклонения, ω - частота колебаний большого маятника.

Момент силы инерции, приложенной к малому маятнику

$$M_{инер} = -ml\ddot{x} = -ml\frac{d^2(b\sin\omega t)}{dt^2} = mlb\omega^2\sin\omega t.$$

Согласно основному закону динамики вращательного движения произведение момента инерции I малого маятника на его угловое ускорение относительно оси, проходящей через точку подвеса B, равно векторной сумме моментов всех внешних сил, приложенных к маятнику, относительно той же оси. Уравнение движения малого маятника в неинерциальной системе координат

$$I\cdot\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -k\alpha - h\cdot\frac{d\alpha}{dt} + mlb\omega^2\sin\omega t,$$

где I - момент инерции маятника, α - угловое смещение, $\dot{\alpha}$ -угловая скорость (точка над буквой обозначает производную по времени), $k=mgl$ - коэффициент момента возвращающей силы (силы тяжести), $mlb\omega^2$ - амплитуда момента вынуждающей силы (силы инерции).

Разделив все члены этого уравнения на I и введя обозначения, получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$\ddot{\alpha} + 2\delta\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = M_0 \sin \omega t \qquad (1)$$

где $\delta = \dfrac{h}{2I}$ - коэффициент затухания, $\omega_0^2 = \dfrac{k}{I}$ - частота собственных незатухающих колебаний, $M_0 = \dfrac{mlb\omega^2}{I}$ - амплитуда углового ускорения вынуждающей силы, ω - частота вынуждающей силы, t - время.

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi) + A_0 e^{-\delta t} \sin(\Omega t + \varphi_0) \qquad (2)$$

Первый член в правой части уравнения (2) соответствует вынужденным незатухающим колебаниям, второй - собственным затухающим колебаниям с амплитудой $A_0 e^{-\delta t}$, частотой $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ и начальной фазой φ_0 (рис.1). Под действием вынуждающей силы вначале произойдет несколько биений, которые получаются вследствие наложения вынужденных и собственных колебаний системы. С течением времени собственные колебания затухают и в установившемся режиме остаются только вынужденные колебания маятника с частотой ω вынуждающей силы. Поэтому после переходного периода вторым членом в (2) можно пренебречь и считать, что при действии на маятник вынуждающей силы устанавливаются гармонические колебания

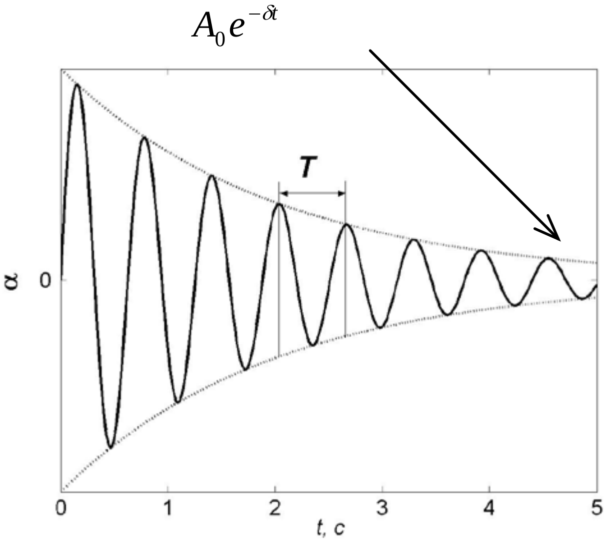


Рис.1. Зависимость α от времени для затухающих колебаний.

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

где $\alpha_0 = \dfrac{mlb\omega^2}{J\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\delta^2}}$ - амплитуда вынужденных колебаний (3)

$$tg\varphi = -\frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (4)$$

Смещение α сдвинуто по фазе на φ относительно вынуждающей силы. В тот момент, когда вынуждающая сила достигает максимального значения, смещение не обязательно наибольшее, например, если $\varphi = \pi/2$, то оно равно нулю.

Амплитудно-частотные характеристики для различных коэффициентов затухания приведены на рис.2. При ω = 0 (постоянная вынуждающая сила) смещение равно нулю. При $\omega \to \infty$ амплитуда α_0 асимптотически стремится к нулю. При некотором промежуточном значении ω амплитуда принимает максимальное для данного коэффициента затухания значение. Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при определенном значении частоты вынуждающей силы называется *резонансом*. Частота вынуждающей силы, при которой наступает резонанс, называется резонансной частотой $\omega_{рез}$.

$$\omega_{рез} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}} \qquad (5)$$

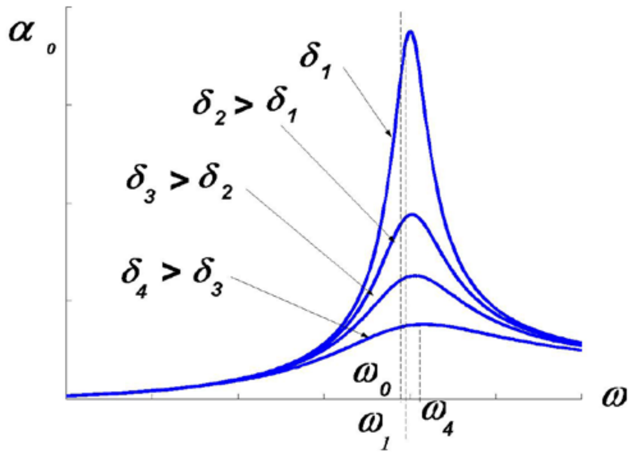


Рис.2. Амплитудно-частотная характеристика вынужденных колебаний.

Резонансная частота зависит от коэффициента затухания системы, но при малом затухании можно приближенно считать, что резонанс наступает при частоте равной частоте свободных колебаний $\omega_{рез} = \omega_0$.

Фазово-частотная характеристика вынужденных колебаний представлена на рис. 3. При $\omega<\omega_0$ φ принимает отрицательные значения, следовательно, смещение отстает по фазе от вынуждающей силы. Это отставание сначала незначительно, но при $\omega\to\omega_0$ оно становится все больше, и при $\omega=\omega_0$ сдвиг фаз $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. При $\omega>>\omega_0$ колебания углового смещения и силы находятся в противофазе $\varphi = -\pi$. Независимо от значений δ сдвиг фаз при $\omega=\omega_0$ имеет одно и то же значение $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

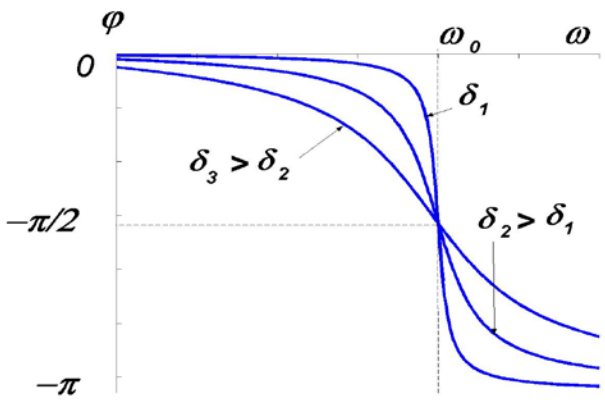


Рис.3. Фазово-частотная характеристика вынужденных колебаний.

Измерения

а) Построение амплитудно-частотной характеристики $\alpha_0=f(\omega)$.

1. Предварительно определите коэффициент затухания δ и циклическую частоту Ω собственных затухающих колебаний малого маятника, а также время τ_0, за которое они полностью прекращаются.

2. Для нахождения τ_0 при покоящемся большом маятнике отклоните малый маятник на угол 10^o-15^o и отпустите, одновременно включив

секундомер. Когда остановится малый маятник, выключите секундомер. Измерение времени τ_0 повторите три раза и вычислите среднее арифметическое, которое используйте в дальнейшем.

2. Определите время t десяти полных колебаний малого маятника. Вычислите период $T = \frac{t}{n}$ и циклическую частоту $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ собственных затухающих колебания малого маятника. Измерение повторите три раза.

3. Для нахождения коэффициента затухания δ малого маятника измерьте время τ n полных колебаний, за которое амплитуда уменьшается от α_1 до α_2 (отсчитывайте по шкале N). Измерения повторите три раза. Коэффициент затухания вычислите по формуле

$$\delta = \frac{1}{\tau}\ln\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{1}{\tau}2{,}3\lg\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

4. Результаты измерений занесите в табл. 1.

Таблица 1.

№	τ_0, с	n	t, с	T, с	Ω, рад/с	α_1, град	α_2, град	n	τ, с	δ, с$^{-1}$
1		10								
2										
3										
Ср.										

5. Закрепите нижнюю чечевицу в самой нижней точке стержня. Верхнюю опустите на нижнюю и тоже закрепите. Большой маятник отклоните на $\beta = 5^\circ$ и, отпуская его, включите секундомер. Измерения начинайте спустя время τ_0. За это время затухают собственные колебания малого маятника, и амплитуда колебаний большого маятника практически не меняется. Определите время n полных колебаний. Вычислите период $T = \frac{t}{n}$ и циклическую частоту колебаний большого маятника $\omega = \frac{2\pi}{T}$. По шкале N измерьте амплитуду установившихся колебаний $\alpha_{0\ \text{экпер}}$ малого маятника. Все измерения повторите пять раз. Результаты занесите в табл. 2.

Таблица 2.

№	Положение чечевиц	n	t, с	T, с	ω, рад/с	$\alpha_{0\ \text{экспер}}$, град
1	5					
	Среднее					
2	10					

	Среднее					
…	…	…	…	…	…	…
7	35					
	Среднее					

5. Аналогичным образом измерьте величины $\alpha_{0\text{ экспер}}$ и ω для других положений чечевиц (стопор нижней чечевицы последовательно закрепите на делениях: 5, 10. 15, 20, 25, 30, 35).

6. Осторожно сняв спицу малого маятника, измерьте его длину l_1 и массу m. Вычислите момент инерции малого маятника $I = \dfrac{ml_1^2}{3}$.

7. Найдите расстояние L от оси вращения O большого маятника до точки подвеса B малого. По формуле (3) определите $\alpha_{0\text{ теорет}}$, принимая $b = \beta L = \dfrac{5^0}{180^0}\pi L$ и $l = \dfrac{l_1}{2}$. Полученные значения занесите в табл. 3.

$l_1 =$ $\qquad$ $m =$ $\qquad$ $I =$ $\qquad$ $L =$ $\qquad$ $b =$

Таблица 3.

№	ω, рад/с	$\alpha_{0\text{ экспер}}$, град	$\alpha_{0\text{ теорет}}$, град
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

8. Полученные экспериментальные и теоретические результаты представьте в виде двух графиков $\alpha_{0\text{экспер}}=f(\omega)$ и $\alpha_{0\text{теорет}}=f(\omega)$ в одних координатных осях.

Необходимо отметить, что во время резонанса колебания малого маятника перестают быть линейными. Поэтому вблизи резонанса возможны заметные отклонения данных эксперимента и теории.

б). Получение фазовой характеристики $\varphi=f_1(\omega)$.

Наблюдая колебания малого маятника, убедитесь, что :

1. При малых частотах ($\omega << \Omega$) смещение малого маятника находится практически в фазе со смещением точки подвеса. Сдвиг фаз в этом случае близок к нулю.

2. При больших частотах ($\omega >> \Omega$) смещение малого маятника находиться практически в противофазе со смещением точки подвеса. Сдвиг фаз в этом случае близок к 180°.

Пользуясь формулой $tg\varphi = -\dfrac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\dfrac{2\omega\delta}{\Omega^2 + \delta^2 - \omega^2}$, рассчитайте значения угла сдвига фаз, находящиеся между предельными значениями (0 и π). Вычисления производите для девяти частот ω_i. Одну частоту возьмите резонансную - $\omega_{рез} = \omega_0 = \sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$, четыре – на восходящей и четыре – на нисходящей ветвях амплитудно-частотной характеристики, располагая их на равном расстоянии друг от друга. Результаты вычислений представьте в виде табл. 4 и графика на миллиметровой бумаге, откладывая по оси абсцисс частоту ω, по оси ординат – угол сдвига φ.

Таблица 4.

№	ω, рад/с	$tg\varphi$	φ, рад
1			
2			
3			
4			
5	$\omega_0 = \omega_{рез}$		
6			
7			
8			
9			

Контрольные вопросы:

1. Какой процесс называется колебательным?
2. Какие колебания называются гармоническими?
3. Дайте определение периода колебаний, амплитуды и циклической частоты?
4. Какой вид имеют дифференциальные уравнения и их решения для собственных свободных, затухающих и вынужденных колебаний?
5. Какое явление называется резонансом?
6. Как резонансная частота зависит от коэффициента затухания маятника?

Литература:

1. Матвеев А.Н., Киселев Д.Ф Общий физический практикум. - М.: Наука, 1991.-272 с.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.2. Молекулярная физика - М.: Наука, 1977.
3. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. - М.: Наука, 1982.
4. Трофимова Т.И. Курс общей физики - М.: Высш. шк., 1990.