Лабораторная работа № 16

ИЗУЧЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

Цель работы: определение параметров собственных и вынужденных колебаний пружинного маятника в воздухе и вязкой жидкости.

Оборудование: набор пружин и грузов, сосуд с жидкостью, устройство кинематического возбуждения колебаний, линейка.

Теория

Исследуемый пружинный маятник состоит из достаточно длинной стальной пружины с коэффициентом жесткости k и груза массы m, прикрепленного к концу пружины. При произвольном отклонении груза массы m от положения равновесия маятник может совершать достаточно сложные колебательные движения в пространстве. Однако, если оттянуть массу m строго вниз по вертикальной оси x на небольшую величину и отпустить, маятник будет совершать малые колебания только вдоль оси x и для описания этих колебаний потребуется только один параметр (одна координата). Начало координат на оси x совмещается со статическим положением груза (т.е. с положением x=0, в котором маятник находится в равновесии). При этом сила тяжести mg будет скомпенсирована некоторым начальным растяжением пружины kx_0 и в дальнейшем рассмотрении участвовать не будет.

Свободные колебания груза на пружине описываются уравнением движения:

$$m\ddot{x} = mg - k(x + x_0), \quad mg = kx_0,$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} = -kx,$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Вводя обозначения $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, получаем дифференциальное уравнение малых колебаний линейного осциллятора

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$t = 0: \quad x = x_0; \quad \dot{x} = \dot{x}_0.$$

Решение (1) называется простым гармоническим колебанием:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где ω_0 - собственная циклическая частота, связанная с периодом собственных колебаний соотношением $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, A - амплитуда, φ - начальная фаза.

Амплитуда A и начальная фаза φ определяются из начальных условий:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}.$$

В реальных условиях всегда действует сила, тормозящая движение, т.е. направленная противоположно скорости, и свободные колебания со временем затухают. При небольших скоростях движения сила жидкого трения пропорциональна величине скорости:

$$F_{тр} = -b\dot{x}.$$

Затухающие колебания груза на пружине описываются уравнением:

$$m\ddot{x} = mg - F_{упр} + F_{тр},$$

$$m\ddot{x} = mg - k(x + x_0) - b\dot{x}, \quad mg = kx_0,$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Дифференциальное уравнение малых затухающих колебаний массы m с учетом сил жидкого трения имеет вид:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (2)$$

где $\beta = \dfrac{b}{2m}$ - коэффициент затухания.

Если $\delta < \omega_0$, то решение (2) имеет вид (рис.1):

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\Omega t + \varphi),$$

где $\Omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ - частота затухающих колебаний, связанная с периодом затухающих колебаний соотношением $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$; A, φ - амплитуда и начальная фаза, определяемые из начальных условий.

Величина $A(t) = Ae^{-\beta t}$ называется амплитудой затухающих колебаний. Как видно из рис.1, амплитуда затухающих колебаний со временем убывает. Логарифмический декремент затухания, характеризующий затухание за один период, определяется как натуральный логарифм отношения амплитуд, отстоящих друг от друга на период:

$$\theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T.$$

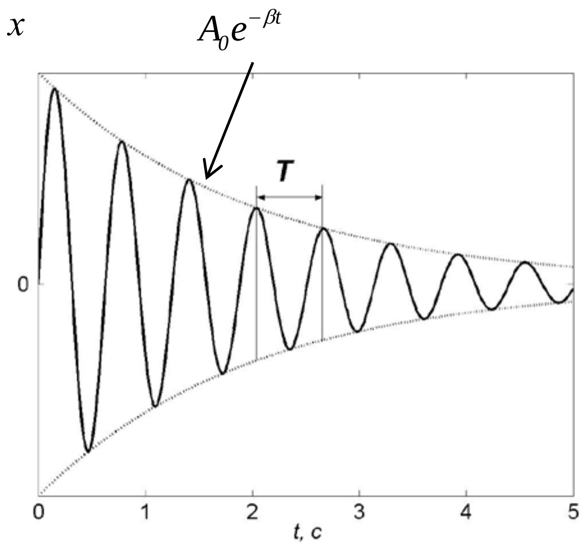

Рис.1. Зависимость x от времени для затухающих колебаний.

Логарифмический

дектемент затухания – величина, обратная числу колебаний N, по истечении которых амплитуда уменьшается в e раз: $\theta = \frac{1}{N}$. Промежуток времени τ, необходимый для этого, называется временем релаксации:

$$\tau = NT = \frac{1}{\beta}.$$

Порядок выполнения работы

1. Определение жесткости пружины статическим и динамическим методами

а) Статический метод. Для определения коэффициента жесткости k пружины статическим методом измерьте длину l, на которую растянется пружина при подвешивании к ней груза известной массы (рис. 2). Из условия равновесия груза

$$kl = mg$$

найдите $k = \frac{mg}{l}$.

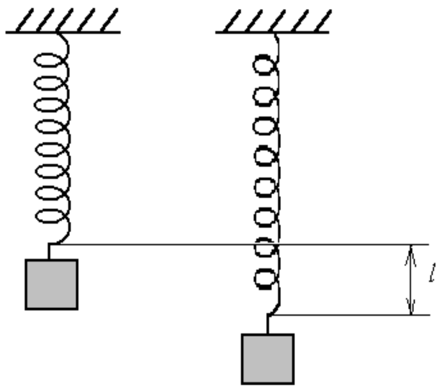

рис.2.

Измерения проведите для пяти различных по массе грузах и заносите в табл. 1.

Таблица 1.

№	m, кг	l, м	k, Н/м	Δk, Н/м	ε, %
1					
…					
5					
Среднее					

б). Динамический метод. Для определения коэффициента жесткости пружины динамическим методом измерьте период собственных колебаний T груза. Для измерения T выведите груз из положения равновесия примерно на 3 см и измерьте секундомером промежуток времени t, в течение которого маятник совершит n полных колебаний ($n = 10 \div 20$). Величина T определяется из соотношения $T = \frac{t}{n}$.

Зная период колебаний и массу груза, вычислите коэффициент жесткости пружины по формуле: $k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$.

Результаты измерений представить в виде табл. 2.

Найденное среднее значение $k_{ср}$ следует сравните с коэффициентом жесткости, полученным статическим методом.

Таблица 2.

№	t, с	n	T, с	k, Н/м	Δk, Н/м	ε,%

1						
…						
5						
Среднее						

2. Исследование влияния начальных условий на период колебаний

Установите, зависимость периода колебаний от величины начального отклонения груза от положения равновесия. Для этого выведите груз из положения равновесия на A_0 = 0,5; 1,0; 1,5; 2,0 … 5 см и определите время t, в течение которого совершаются 10 полных колебаний. В этом случае период колебаний $T = \frac{t}{10}$. При этом для каждого значения A_0 проделайте не менее 3 измерений и возьмите среднее значение. Результаты измерений представьте в виде табл. 3 и графика $T=T(A_0)$. Какой можно сделать вывод по результатам измерений?

Таблица 3

№	A_0, см	T_1, с	T_2, с	T_3, с	$T_{ср}$, с
1	0,5				
2	1,0				
…	…				
9	4,5				
10	5,0				

3. Определение логарифмического декремента затухания колебаний и коэффициента трения

Для определения логарифмического декремента затухания колебаний пружинного маятника груз массы m поместите в сосуд с жидкостью (рис.3) и измерьте время t, в течение которого амплитуда колебаний уменьшится до 10% своей первоначальной величины, т.е.

$$A_t = 0{,}1 \cdot A_0 .$$

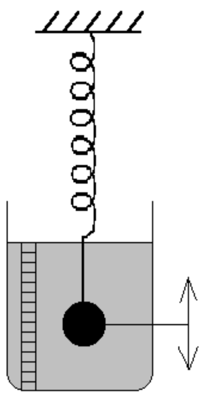

рис.3

По числу полных колебаний, совершенных маятником за время t, найдите период затухающих колебаний $T = \frac{t}{n}$. Измерения (не менее 5) проводите при фиксированной начальной амплитуде A_0..

По данным измерений вычислите логарифмический декремент затухания θ из соотношения

$$\theta = \frac{T}{t}\ln\frac{A_0}{A_t} = \frac{1}{n}\ln\frac{A_0}{A_t} .$$

Коэффициент трения b, входящий в выражение силы жидкого трения $\vec{F}_{тр} = -b\vec{v}$, найдите по формуле

$$b = \frac{2m\theta}{T} \ .$$

Результаты измерений занесите в табл. 4.

Таблица 4

№	A_0, см	n	t, с	T, с	θ	$\Delta\theta$	ε_θ, %	b, Н/м	Δb, Н/м	ε_b, %
1										
…										
5										
Ср.										

4. Исследование вынужденных колебаний груза в вязкой среде (жидкости)

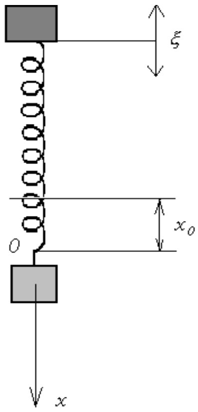

рис.4.

Для реализации внешней вынуждающей силы верхний конец пружины приводят в гармоническое колебательное движение по вертикальной прямой с амплитудой ξ_0 и частотой ω: $\xi = \xi_0 \sin \omega t$ (рис.4). В данном случае используется кинематический способ возбуждения вынужденных колебаний. Дифференциальное уравнение малых вынужденных колебаний массы m с учетом сил жидкого трения имеет вид:

$$m\ddot{x} = mg - F_{упр} + F_{тр},$$

где $F_{упр} = k(x_0 + x - \xi)$, $F_{тр} = -b\dot{x}$ (точки над буквой обозначают производные по времени). Учитывая, что $mg = kx_0$ дифференциальное уравнение вынужденных колебаний приводится к виду

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \qquad (3)$$

где $\beta = \dfrac{b}{2m}$ - коэффициент затухания, $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ - квадрат частоты собственных колебаний при отсутствии жидкого трения, $f_0 = \dfrac{k\xi_0}{m}$ - амплитудное ускорение вынуждающей силы.

Из математики известно, что общее решение неоднородного дифференциального уравнения (3) можно представить в виде суммы частного решения данного уравнения и общего решения однородного уравнения ($f_0 = 0$):

$$x(t) = x_1(t) + Ae^{-\beta t}\cos(\Omega t + \varphi), \qquad (4)$$

где $x_1(t)$ соответствует вынужденным колебаниям с частотой ω, а второй член - затухающим собственным колебаниям с частотой $\Omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$. Функция $x(t)$, описываемая уравнением (4), представляет собой сложную функцию времени, определяемую амплитудой f_0m и частотой ω вынуждающей силы, характеристиками системы ω_0, β и начальными условиями $x(0)$, $\dot{x}(0)$ (рис.5). Однако такой сложный вид колебаний сохраняется в системе только в ограниченный интервал времени, который получил название *переходного режима.* Вследствие наличия затухания $\sim e^{-\beta t}$ собственные колебания спустя некоторое время прекращаются, и в системе реализуется *режим установившихся вынужденных колебаний,* описываемых частным решением $x_1(t)$.

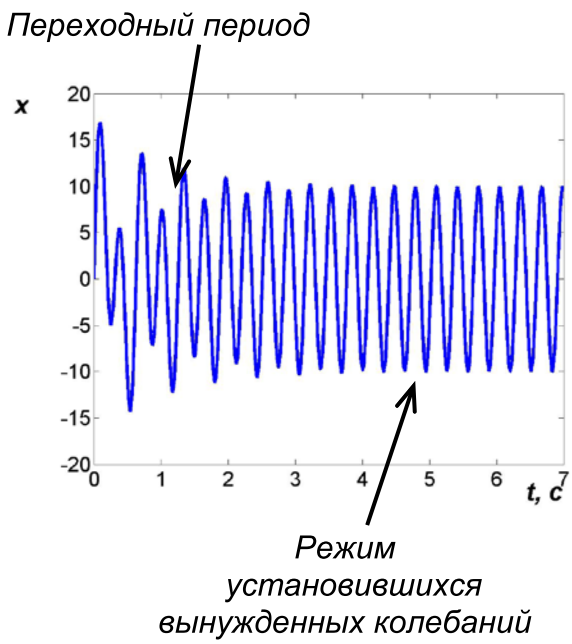

рис.5.

Частное решение уравнения (3) ищем в виде

$$x = x_1(t) = A_в \cos(\omega t + \varphi).$$

Подстановка этого выражения в (3) дает следующее значение для амплитуды вынужденных колебаний $A_в$ и сдвига фаз между смещением массы m и вынуждающей силы f_0m :

$$A_в = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \qquad tg\varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{5}$$

Из (5) видно, что амплитуда $A_в$ и фаза φ установившихся вынужденных колебаний зависят как от характеристик вынуждающей силы, так и от параметров системы.

Смещение x сдвинуто по фазе на φ относительно вынуждающей силы. В тот момент, когда вынуждающая сила достигает максимального значения, смещение не обязательно наибольшее, например, если $\varphi = \pi/2$, то оно равно нулю.

Амплитудно-частотные характеристики для различных коэффициентов затухания приведены на рис.6. При ω = 0 (постоянная вынуждающая сила) смещение равно $A_в = \dfrac{f_0}{\omega_0} = \dfrac{k\xi_0}{m\omega_0}$. При $\omega \to \infty$ амплитуда $A_в$

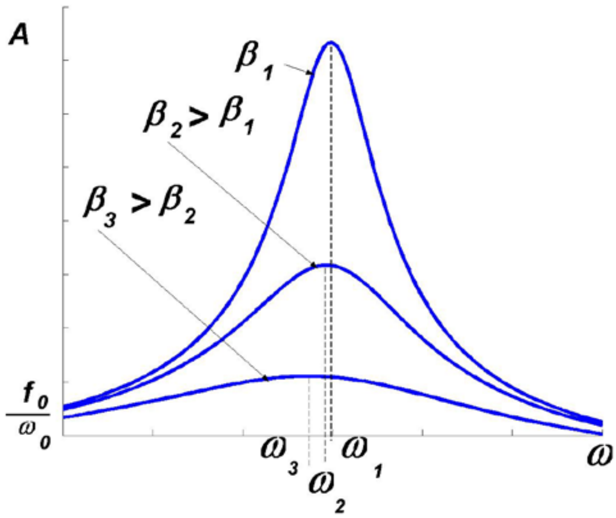

рис.6. Амплитудно-частотная характеристика вынужденных

асимптотически стремится к нулю. При некотором промежуточном значении ω амплитуда принимает максимальное для данного коэффициента затухания значение. Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при определенном значении частоты вынуждающей силы называется *резонансом*. Частота вынуждающей силы, при которой наступает резонанс, называется резонансной частотой $\omega_{рез}$.

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\,. \qquad (7)$$

Резонансная частота зависит от коэффициента затухания системы, но при малом затухании можно приближенно считать, что резонанс наступает при частоте равной частоте свободных колебаний $\omega_{рез} = \omega_0$.

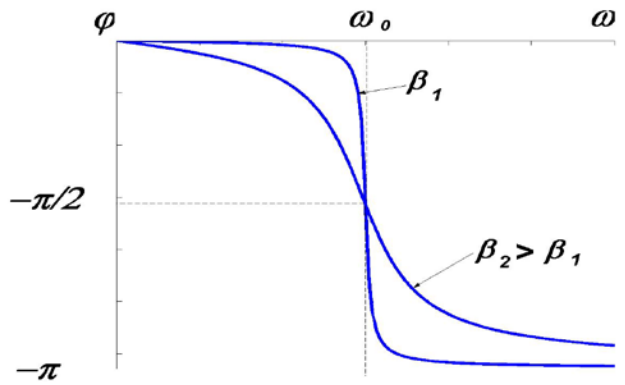

рис.7. Фазово-частотная характеристика вынужденных колебаний.

Фазово-частотная характеристика вынужденных колебаний представлена на рис. 6. При $\omega<\omega_0$ φ принимает отрицательные значения, следовательно, смещение отстает по фазе от вынуждающей силы. Это отставание сначала незначительно, но при $\omega\to\omega_0$ оно становится все больше, и при $\omega=\omega_0$ сдвиг фаз $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. При $\omega>>\omega_0$ колебания смещения x и силы находятся в противофазе $\varphi = -\pi$. Независимо от значений β сдвиг фаз при $\omega=\omega_0$ имеет одно и то же значение $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Порядок выполнения.

1. Исследуйте зависимость амплитуды вынужденных колебаний $A_в^{экс}$ от частоты колебаний ω точки подвеса пружинного маятника в случае помещения массы m в стакан с водой. Измерения амплитуды вынужденных колебаний проводите после завершения переходного режима, когда собственные колебания в системе полностью прекратятся. Частота вынужденных колебаний груза ω равна частоте колебаний точки подвеса. Для определения ω определите время t, за которое точка подвеса совершает n = 10 полных колебаний. Тогда $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi n}{t}$. Для каждой частоты выполните три измерения амплитуды $A_в^{экс}$ и занесите результаты измерений в таблицу 5.

2. Вычислите по (5) теоретическое значение амплитуды вынужденных колебаний $A_в^{теор}$. Необходимые для расчета значения жесткости пружины k, коэффициента затухания $\beta = \frac{b}{2m}$ и частоты собственных свободных колебаний $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ возьмите из предыдущих

пунктов лабораторной работы. Амплитудное смещение ξ_0 точки подвеса пружины относительно своего среднего положения измерьте с помощью линейки. Результаты расчетов внесите в таблицы 5 и 6.

3. На одном графике постройте теоретические (по (5)) и экспериментальные амплитудно-частотные характеристики $A_в = f(\omega)$.

4. Определить относительную ошибку измерений амплитуды вынужденных колебаний путем сравнения средней величины $\langle A_в^{экс} \rangle$ с теоретическим значением $A_в^{теор}$, рассчитанным по формуле (5):

$$\varepsilon = \left| \frac{\langle A_в^{экс} \rangle - A_в^{теор}}{\langle A_в^{экс} \rangle} \right| \cdot 100\ \% .$$

Таблица 5.

№	t, с	ω, $с^{-1}$	$A_{1в}^{экс}$, см	$A_{2в}^{экс}$, см	$A_{3в}^{экс}$, см	$\langle A_в^{экс} \rangle$, см	$A_в^{теор}$, см	ε, %
1								
…								
6								

Таблица 6.

m, кг	k, Н/м	ξ_0, м	ω_0, $с^{-1}$	f, $м/с^2$	β, $с^{-1}$

Контрольные вопросы:

1. От каких факторов зависит частота, период и амплитуда собственных колебаний? Зависят ли эти величины от действия на тело постоянных сил? От начальных условий движения?
2. Какой из этих двух методов – статистический или динамический - вносит большую ошибку в определении коэффициента жесткости k? Почему?
3. Каков физический смысл коэффициента затухания и декремента колебаний груза?
4. Зависят ли частота и период затухающих колебаний от продолжительности колебательного движения груза? От начальных условий?
5. Влияет ли сопротивление на частоту и период вынужденных колебаний? Зависит ли период вынужденных колебаний от частоты собственных колебаний груза?
6. От каких факторов зависит амплитуда вынужденных колебаний? Зависит ли она от начальных условий движения?
7. Какую роль играет изменение частоты вынуждающей силы в движении груза?
8. Почему при резонансной частоте амплитуда вынужденных колебаний максимальна?

Литература:

1. Стрелков С.П. Механика. - М.: Наука, 1975, - 559 с.

2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 1. Механика, - М.: Наука, 1979, - 519 с.
3. Хайкин С.С. Физические основы механики. - М.: Наука, 1971, - 751 с.
4. Матвеев А.Н., Киселев Д.Ф. Общий физический практикум. - М.: Изд-во МГУ, 1991, - 272 с.
5. Дудникова Н.И., Мищенко С.С., Чен Б.Б. Обработка результатов физического эксперимента. Методическое пособие. - Бишкек: КРСУ, 1999.