Лабораторная работа № 2

ИЗМЕРЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ РАЗМЕРОВ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ МИКРОМЕТРА. СТАТИСТИЧЕКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ.

Цель работы: приобретение навыков работы с круговой измерительной шкалой микрометра и проведение статистической обработки результатов измерений.

Оборудование: микрометр, набор однотипных зерен растений.

Устройство микрометра

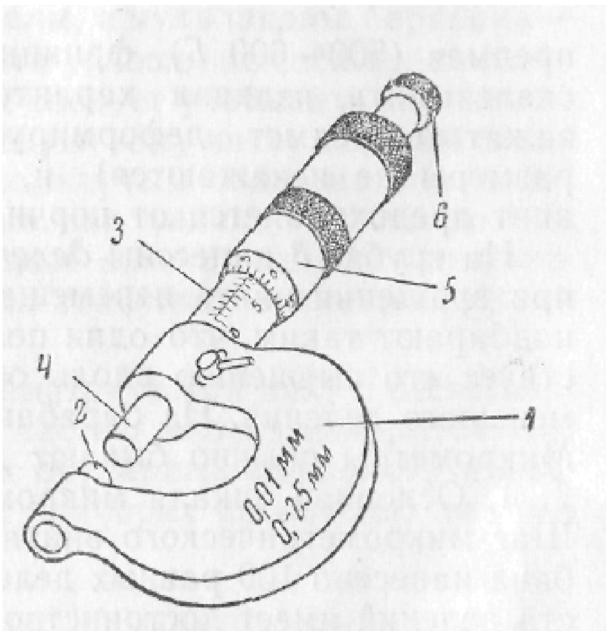


Рис.1. Микрометр.

Микрометр (рис.1) представляет собой прибор, предназначенный для измерения линейных размеров тел с точностью до 0,01 мм. Микрометр состоит из скобы *1* с пяткой *2* и трубкой (стеблем) *3*. В трубке имеется внутренняя резьба, в которую ввинчен микрометрический винт *4* с закрепленным на нем барабаном *5*. На конце барабана имеется фрикционная головка (трещотка) *6*. На трубке *3* нанесены деления основной шкалы, а на барабане *5* – добавочной шкалы.

Действие микрометра основано на свойстве винта, совершать при повороте поступательное перемещение, пропорциональное углу поворота.

Измерения при помощи микрометра

При измерении предмет зажимается между пяткой и микрометрическим винтом путем вращения трещотки. Достаточная степень нажатия на измеряемый предмет определяется по характерному треску трещотки. Прежде чем проводить измерения, необходимо убедиться, что микрометр исправлен – нулевое деление основной шкалы должно совпадать с нулевым делением барабана.

Длина измеряемого предмета определяется формулой

$$L = k \cdot b + n\frac{b}{m},$$

где k - число целых делений основной шкалы;

b - цена одного деления основной шкалы;

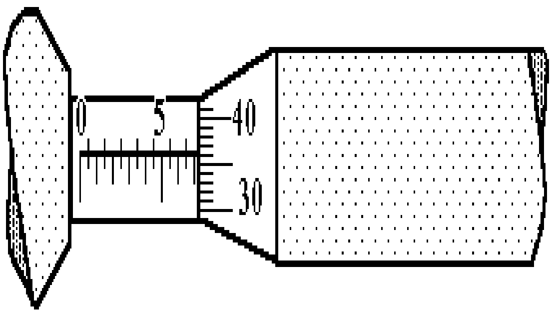
m - общее число делений шкалы барабана;

n - число делений (показания) шкалы барабана.

Основная шкала микрометра имеет цену деления b = 0,5 мм. При этом половинные деления чтобы не загромождать шкалу располагаются над прямой линией основной шкалы. Шкала барабана разбита на 50 делений. Таким образом, цена деления шкалы барабана равна $\frac{b}{m} = \frac{0{,}5 мм}{50} = 0{,}01 мм$.

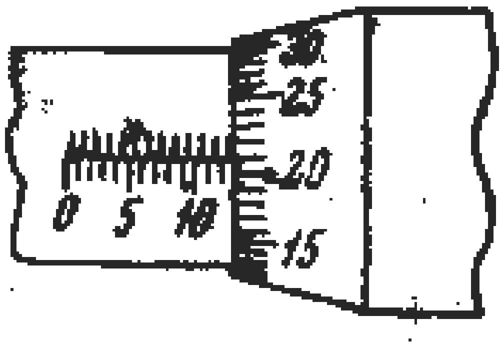
При отсчетах на микрометре если последним видимым делением основной шкалы является нижнее деление, то к числу целых миллиметров, отсчитанных по основной шкале, прибавляется число сотых миллиметра, отсчитанных по шкале барабана напротив линии основной шкалы. Если последним видимым делением является верхнее деление, то к целому числу целых миллиметров добавляется 0,50 мм и число сотых миллиметра, отсчитанных по барабану.

Примеры снятия показаний микрометра даны на рис.2.а, б.



а)

$$L = 0{,}5 мм \cdot 14 + \frac{36}{100} = \\ = 7 мм + 0{,}36 мм = 7{,}36 мм$$



б)

$$L = 12 мм + 0{,}50 мм + 0{,}21 мм = \\ = 12{,}71 мм$$

Рис.2. Счетный механизм микрометра.

Отсчет 7 мм на рис.2.а по линейной шкале виден сразу, поэтому отпадает необходимость в подсчете целых полумиллиметров и их последующем умножения на 0,5 мм.

Статистическая обработка измерений

При любых экспериментальных исследованиях невозможно найти истинное значение физической величины. Из-за посторонних влияний на процесс измерения любое измерение всегда сопровождается погрешностями. Различают три вида погрешностей: *промахи, систематические и случайные погрешности* измерения. *Промахи* возникают вследствие недосмотра экспериментатора или неисправности аппаратуры. *Систематические погрешности* являются следствием несовершенства приборов, а также недостатков методики измерения. Они всегда дают отклонение результата измерения от истинного значения в одну и ту же сторону. Систематические ошибки могут быть связаны с ошибками приборов (неправильная шкала, неравномерно растягивающаяся пружина, неравномерный шаг микрометрического винта, неравные плечи весов) и с самой постановкой опыта, например, при взвешивании тела малой плотности без учета выталкивающей архимедовой силы, которая систематически занижает вес тела. Они могут быть изучены и учтены путем внесения поправок в результаты измерений.

Случайные погрешности меняют величину и знак от опыта к опыту и являются следствием случайных, неконтролируемых помех. Их устранить нельзя, но благодаря тому, что они подчиняются вероятностным закономерностям, всегда можно указать пределы, внутри которых с заданной вероятностью заключается истинное значение измеряемой величины.

Случайные погрешности изучаются в теории погрешности, в которой доказывается, что наиболее достоверной приближенной оценкой истинного значения измеряемой величины x_0 является среднее арифметическое, определяемое по формуле:

$$x_{cp} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \qquad (1)$$

Случайные погрешности измерений подчиняются нормальному закону распределения (распределению Гаусса):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x - x_{cp})^2}{2\sigma^2}} \qquad (2)$$

где $f(x)$ – функция распределения (плотность вероятности) погрешностей;

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_{cp} - x_i\right)^2}{n-1}} \qquad (3)$$

- среднеквадратичная погрешность отдельного измерения или стандартное отклонение.

Плотность вероятности $f(x) = \frac{dn}{n \cdot dx}$ позволяет найти вероятность нахождения истинного значения измеряемой величины x_0 в заданном интервале. Например, вероятность нахождения истинного значения измеряемой величины в интервале $a \le x_0 \le b$ равна $P(a \le x_0 \le b) = \int_a^b f(x)dx$.

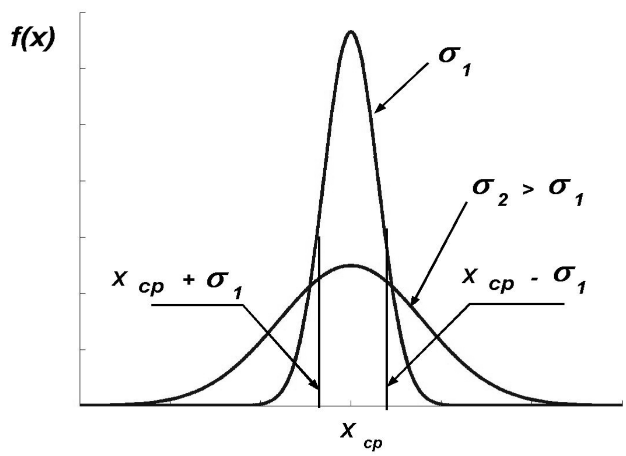


Рис.3. Нормальное распределение.

Графики закона нормального распределения с различными значениями σ изображены на рис. 3. Точки $x = x_{cp} \pm \sigma$ есть точки перегиба кривой Гаусса. Величина σ количественно отражает разброс значений измеряемой величины.

Отношение площади под кривой Гаусса, ограниченной значениями $x = x_{ср} \pm \sigma$, ко всей площади под кривой составляет 0,68, т.е. любое проведенное измерение x с вероятностью 0,68 (68%) лежит в интервале $x_{ср} - \sigma \le x \le x_{ср} + \sigma$. Вероятность попадания в интервал $x_{ср} - 2\sigma \le x \le x_{ср} + 2\sigma$ любого проведенного измерения составляет 0,95 (95%).Вероятность попадания в интервал $x_{ср} - 3\sigma \le x \le x_{ср} + 3\sigma$ равна 0,997 (99,7%).

Во время проведения физического эксперимента интересует не точность каждого из n измерений, а погрешность среднего арифметического $x_{ср}$, и, главное, насколько оно соответствует истинному значению измеряемой величины x_0. Стандартную ошибку отклонения $x_{ср}$ от x_0 можно оценить с помощью среднеквадратичной погрешности результата $\sigma_{ср}$. В теории вероятностей доказывается, что средняя квадратичная погрешность результата $\sigma_{ср}$ связана со средней квадратичной погрешностью отдельного измерения σ следующим образом:

$$S_{ср} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{ср}\right)^2}{n(n-1)}}$$

Погрешность $S_{ср}$ обычно называют стандартной погрешностью опыта. а ее квадрат – дисперсией.

При небольшом числе измерений для оценки истинного значения x_0 используется критерий Стьюдента, согласно которому

$$\left|x_0 - x_{ср}\right| < t(P,n)S_{ср},$$

где $t(P,n)$ – коэффициент Стьюдента, зависящий от заданной доверительной вероятности P и числа измерений n.

Результат измерения величины x представляется в виде

$$x = x_{ср} \pm S_{ср} \cdot t(P,n),$$

означающем, что истинное значение измеряемой величины x_0 находится в доверительном интервале $\left[x_{ср} - t(P,n)\cdot S_{ср}; \quad x_{ср} + t(P,n)\cdot S_{ср}\right]$ с доверительной вероятностью (надежностью) P.

Порядок статистической обработки результатов измерений с помощью доверительных интервалов и таблица коэффициентов Стьюдента даются в Приложениях 2, 3.

Порядок выполнения работы:

1. Измерьте микрометром толщину x ста зерен в мм (n = 100) и занесите данные в табл.1. Согласно (1) найдите среднее арифметическое значение.

2. Вычислите абсолютные погрешности отдельных измерений $\Delta x_1 = |x_1 - x_{ср}|$, $\Delta x_2 = |x_2 - x_{ср}|$, ..., $\Delta x_n = |x_n - x_{ср}|$ и среднюю абсолютную погрешность $\Delta x_{ср} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i}{n}$

Таблица 1.

n	x_i, мм	Δx_i, мм
1		
…		
100		
Сред.		

3. Используя табл.1, из всех результатов измерений найдите наибольшее x_{max} и наименьшее x_{min}. Разность $x_{\max} - x_{\min}$ разделите на m частей. Полученная величина $\Delta h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m}$ называется интервалом гистограммы (для ста измерений значение m подбирается любым в диапазоне от 8 до 12 с целью получения конечного Δh с минимальным числом дробных разрядов).

4. Определите границы каждого из m интервалов и подсчитайте число попаданий размеров зерен в первый интервал - Δn_1, во второй интервал - Δn_2 и т.д. Если измерение попадает на границу интервала, то учитывайте его только в одном интервале. Отношение $\omega_i = \frac{\Delta n_i}{n}$ дает вероятность попаданий результата измерения в i–ый интервал. Полученные значения внесите в табл.2.

Таблица 2.

№	Границы интервала	Δn	ω
1	$x_{min} \div x_{min} + \Delta h$		
2	$x_{min} + \Delta h \div x_{min} + 2\cdot\Delta h$		
3	$x_{min} + 2\cdot\Delta h \div x_{min} + 3\cdot\Delta h$		
…			
m	$x_{min} + (m-1)\cdot\Delta h \div x_{max}$		

5. Постройте гистограмму (ступенчатую диаграмму) распределения измерений толщины зерен. Для этого отложите по оси абсцисс диапазон измеренных толщин x и разбейте его на интервалы Δh. По оси ординат над каждым интервалом отложите прямоугольник, высота которого равна вероятности ω, а ширина – интервалу Δh. Соедините средние точки верхних оснований прямоугольников плавной кривой – кривой распределения ошибок измерений.

6. На том же графике отложите по оси абсцисс среднее значение толщины зерен и посмотрите, как располагается гистограмма относительно этой величины.

7. По формуле (3) вычислите величину среднеквадратичной погрешности отдельного измерения σ и отложите по оси абсцисс интервал [$x_{ср}$-σ, $x_{ср}$+σ]. Интервал [$x_{ср}$-σ, $x_{ср}$+σ] внутри которого искомая величина находится с доверительной вероятностью, в теории ошибок называется *доверительным интервалом*. Вероятность попадания истинного значения измеряемой величины в этот интервал называется *доверительной вероятностью* или *коэффициентом надежности Р*. Для определения P подсчитайте площадь ΔS (в мм^2) под кривой распределения погрешностей, ограниченной по оси абсцисс значениями $x_{ср}$-σ и $x_{ср}$+σ, и разделите ее на площадь S (в мм^2) под всей кривой ошибок. При построении экспериментальной кривой распределения ошибок в большинстве случаев наблюдается отклонение от закона Гаусса -экспериментальная кривая может быть асимметричной относительно $x_{ср}$, иметь дополнительные максимумы и т.д.

8. Найдите по экспериментальной кривой распределения ошибок доверительные вероятности для интервалов [$x_{ср}$-2σ, $x_{ср}$+2σ] и [$x_{ср}$-3σ, $x_{ср}$+3σ] и сравните их с теоретическими. Полученные результаты занесите в табл.3.

Таблица 3.

Доверительный интервал	S	ΔS	$P_{экспер}$	$P_{теорет}$
[$x_{ср}$-σ, $x_{ср}$+σ]				0,68
[$x_{ср}$-2·σ, $x_{ср}$+2·σ]				0,95
[$x_{ср}$-3·σ, $x_{ср}$+3·σ]				0,997

Статистическая обработка результатов лабораторных работ

1. Проведите измерение физической величины и данные занесите в таблицу.

Допустим, что определялась масса на аналитических весах:

$x_1 = 5{,}6486\ г, \quad x_2 = 5{,}6483\ г, \quad x_3 = 5{,}6488\ г, \quad x_4 = 5{,}6487\ г, \quad x_5 = 5{,}6480\ г.$

2. Найдите среднее значение физической величины из n измерений:

$$x_{ср} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

$$x_{ср} = \frac{5{,}6486 + 5{,}6483 + 5{,}6488 + 5{,}6487 + 5{,}6480}{5} = 5{,}6485\ г.$$

3. Найдите абсолютные погрешности единичных измерений:

$$\Delta x_i = \left| x_i - x_{ср} \right|.$$

$\Delta x_1 = \left|5{,}6486 - 5{,}6485\right| = 0{,}0001; \quad \Delta x_2 = \left|5{,}6483 - 5{,}6485\right| = 0{,}0002;$

$\Delta x_3 = \left|5{,}6488 - 5{,}6485\right| = 0{,}0003; \quad \Delta x_4 = \left|5{,}6487 - 5{,}6485\right| = 0{,}0002;$

$\Delta x_5 = \left|5{,}6480 - 5{,}6485\right| = 0{,}0005;$

4. Определите среднеквадратичную погрешность среднего арифметического:

$$S_{ср} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}.$$

$$S_{ср} = \sqrt{\frac{0{,}0001^2 + 0{,}0002^2 + 0{,}0003^2 + 0{,}0002^2 + 0{,}0005^2}{5 \cdot (5-1)}} = 1{,}4 \cdot 10^{-4}\ г = 0{,}00014\ г.$$

5. Задайте требуемую доверительную вероятность. Обычно достаточно задать P = 0,9. В редких случаях, когда требуется высокая надежность, задают P = 0,99.

6. Определите по заданной вероятности P и числу проведенных измерений n коэффициент Стьюдента (Приложение 3):

P = 0,9 $\quad n$ = 5, $\quad k=n$-1=4, $\quad t(P,n)$ = 2,13.

7. Найдите доверительный интервал для случайных ошибок измерений:

$$\Delta x = t(P,n) \cdot S_{ср}.$$

$\Delta x = 2{,}13 \cdot 0{,}00014 = 0{,}00030\ г.$

8. Оцените погрешности других ошибок (ошибка прибора, ошибка округления и т.д.) и суммарную ошибку при определении физической величины:

$$\Delta x_{общ} = \sqrt{\Delta x^2 + \delta^2 + \beta^2 + \ldots}.$$

В нашем случае ошибка прибора (δ = 0,0001 г) и ошибка округления (β = 0,00001 на порядок меньше случайной ошибки):

$\Delta x_{общ} = \sqrt{0{,}00030^2 + 0{,}0001^2 + 0{,}00001^2} = 0.00033\ г.$

9. Найдите относительную погрешность

$$\varepsilon = \frac{\Delta x_{общ}}{x_{ср}} \cdot 100\,\%$$

$$\varepsilon = \frac{0{,}00033}{5{,}6485} \cdot 100\,\% = 0{,}05\,\%$$

и запишите окончательный результат в виде:

$x = x_{ср} \pm \Delta x = (5{,}6485 \pm 0{,}0003)\,г; \quad P = 0{,}9$.

Приложение 3

Коэффициенты Стьюдента *t(P,n)*

k	*P*							
	0,5	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**0,95**	**0,98**	**0,99**
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,718	0,906	1,134	1,144	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,700	0,879	1,093	0,372	1,812	2,228	2,764	3,169
15	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
20	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
30	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,257	2,750
∞	0,67449	0,84162	1,03643	1,28155	1,64485	1,95996	2,32634	2,57582

Образец выполнения лабораторной работы №2.

При измерении микрометром толщины зерен были получены следующие значения

Таблица 1.

№	*x*	*Δx*	№	*x*	*Δx*	№	*x*	*Δx*	№	*x*	*Δx*
1	3,97	2,08	26	6,36	0,31	51	5,74	0,31	76	4,61	1,44
2	5,01	1,04	27	6,58	0,53	52	5,85	0,20	77	4,97	1,08
3	5,43	0,62	28	7,03	0,98	53	5,96	0,09	78	5,42	0,63
4	5,57	0,48	29	7,4	1,35	54	6,04	0,01	79	5,53	0,52
5	5,7	0,35	30	8,29	2,24	55	6,23	0,18	80	5,67	0,38
6	5,78	0,27	31	4,59	1,46	56	6,36	0,31	81	5,75	0,30
7	5,88	0,17	32	4,93	1,12	57	6,61	0,56	82	5,87	0,18
8	5,98	0,07	33	5,36	0,69	58	7,07	1,02	83	5,97	0,08
9	6,1	0,05	34	5,53	0,52	59	7,51	1,46	84	6,04	0,01
10	6,2	0,15	35	5,65	0,40	60	8,41	2,36	85	6,25	0,20
11	6,32	0,27	36	5,74	0,31	61	4,61	1,44	86	6,42	0,37
12	6,57	0,52	37	5,85	0,20	62	4,96	1,09	87	6,62	0,57
13	7,02	0,97	38	5,94	0,11	63	5,39	0,66	88	7,11	1,06
14	7,4	1,35	39	6,03	0,02	64	5,53	0,52	89	7,63	1,58
15	8,27	2,22	40	6,2	0,15	65	5,66	0,39	90	8,66	2,61
16	4,55	1,50	41	6,36	0,31	66	5,75	0,30	91	5,46	0,59
17	4,93	1,12	42	6,59	0,54	67	5,86	0,19	92	4,97	1,08
18	5,33	0,72	43	7,06	1,01	68	5,97	0,08	93	5,42	0,63
19	5,53	0,52	44	7,48	1,43	69	6,04	0,01	94	5,53	0,52
20	5,65	0,40	45	8,31	2,26	70	6,23	0,18	95	5,68	0,37
21	5,74	0,31	46	4,6	1,45	71	6,4	0,35	96	5,77	0,28
22	5,85	0,20	47	4,94	1,11	72	6,61	0,56	97	5,88	0,17
23	5,94	0,11	48	5,37	0,68	73	7,1	1,05	98	2,97	3,08
24	6,02	0,03	49	5,53	0,52	74	7,6	1,55	99	6,06	0,01
25	6,2	0,15	50	5,66	0,39	75	8,43	2,38	100	6,25	0,20
									Сред.	6,05	0,63

Среднее значение толщины зерен x_{cp} = 6,05 мм. Максимальная толщина x_{max} = 8,66 мм, минимальная толщина x_{min} = 2,97 мм.

Для построения гистограммы разобьем диапазон значений измерений на m = 10 частей. Ширина интервала равна $\Delta h = \dfrac{8{,}66\text{мм} - 2{,}97\text{мм}}{10} = 0{,}57\text{мм}$.

Определив границы интервалов, посчитаем число попаданий в каждый интервал Δn и вероятность $\omega = \dfrac{\Delta n}{n}$ данного события. Результаты представим в виде табл.2.

Таблица 2.

№	Границы интервала	Δn	ω
1	2,97 – 3,54	1	0,01
2	3,54 – 4,10	1	0,01
3	4,10 – 4,68	5	0,05
4	4,68 – 5,25	7	0,07
5	5,25 – 5,82	29	0,29
6	5,82 – 6,38	31	0,31
7	6,38 – 6,95	8	0,08

8	6,95 – 7,52	10	0,10
9	7,52 – 8,09	2	0,02
10	8,09 – 8,66	6	0,06

По данным табл.2 построим гистограмму, откладывая по оси абсцисс толщину зерен *x*, а по оси ординат – вероятность попадания измерения в *i*–ый интервал (на рис. вероятность измеряется в %). Соединяя средние точки верхних оснований прямоугольников плавной кривой, получаем кривую распределения ошибок (рис.4).

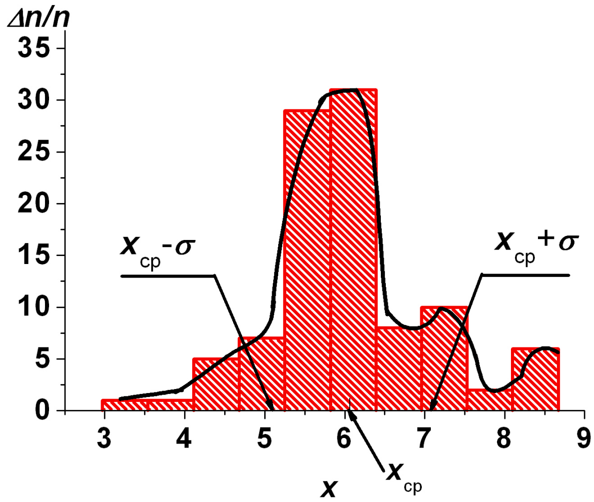


Рис.4. Пример выполнения лабораторной работы.

Среднеквадратичная погрешность отдельного измерения, определенная по формуле (3) равна $\sigma \approx$ 0,98 мм.

Подсчитаем площадь ΔS под кривой распределения ошибок на интервале $6{,}05 - 0{,}98\,мм \le x \le 6{,}05 + 0{,}98\,мм$, $5{,}07\,мм \le x \le 7{,}03\,мм$.

ΔS = 678 мм^2.

Полная площадь под кривой распределения ошибок S = 1045 мм^2.

Таким образом, вероятность того, что измеряемая толщина зерен лежит в интервале [$x_{ср}$-σ, $x_{ср}$+σ] равна $P_{экспер} = \dfrac{678\,мм^2}{1045\,мм^2} = 0{,}65 = 65\,\%$.

Проведем аналогичные расчеты для интервалов $x_{ср} \pm 2 \cdot \sigma$ и $x_{ср} \pm 3 \cdot \sigma$ и полученные результаты представим в виде табл. 3.

Таблица 3.

Доверительный интервал	S	ΔS	$P_{экспер}$	$P_{теорет}$
$5{,}07\,мм \le x \le 7{,}03\,мм$	1045	678	0,65	0,68
$4{,}09\,мм \le x \le 8{,}01\,мм$		980	0,94	0,95
$3{,}11\,мм \le x \le 8{,}99\,мм$		1036	0,991	0,997

Контрольные вопросы:

1. Назначение и устройство микрометра. Какова его точность?
2. Что является главным источником ошибок при работе с микрометром?
3. Назовите систематические и случайные ошибки, которые могут возникать при измерении микрометром.
4. Что такое истинное значение физической величины?
5. Что такое доверительный интервал и доверительная вероятность?
6. Физический смысл стандартного отклонения σ. Отличается ли экспериментальное значение доверительной вероятности от теоретического для интервалов $x_{ср} \pm \sigma$, $x_{ср} \pm 2 \cdot \sigma$ и $x_{ср} \pm 3 \cdot \sigma$?

7. Какого аналитическое выражение имеет функция плотности распределения Гаусса?
8. Какой вид принимает функция плотности нормального распределения для ваших экспериментальных данных?

Литература:

1. Физический практикум/Под ред. В.И. Ивероновой. - М.: Наука, 1968.
2. Дудникова Н.И., Мищенко С.С., Чен Б.Б. Обработка результатов физического эксперимента. Методическое пособие. - Бишкек: КРСУ, 1999.
3. Зайдель А.Н. Элементарные оценки ошибок измерений. - Ленинград, 1968.