

Лабораторная работа № 4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПО ПЛАНУ ИЛИ КАРТЕ С ПОМОЩЬЮ ПЛАНИМЕТРА

Цель работы: изучение принципа работы планиметра и определение с его помощью площади произвольных плоских фигур.

Оборудование: планиметр, плоские фигуры.

Способы вычисления площадей плоских фигур

Для определения площадей применяют три способа: координатный, графический, механический.

1. *Координатный* способ заключается в вычислении площади многоугольника по координатам его вершин. Многоугольник разбивают на N треугольников, площадь каждого из которых равна

$$S = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

где (x_1, y_1) , (x_2, y_2) и (x_3, y_3) – координаты вершин треугольника.

Площадь многоугольника складывается из площадей составляющих его треугольников.

Данный способ дает наиболее точные результаты, но он не применим для вычисления площадей участков, ограниченных кривыми линиями.

2. *Графический* способ состоит в вычислении площадей многоугольников по формулам геометрии с предварительным измерением необходимых величин графическим путем по плану. Обычно многоугольник разбивают на N треугольников, в каждом из которых измеряют основание b и высоту h . Площадь многоугольника равна сумме площадей треугольников, на которые он разбит

$$S = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} b_i h_i.$$

Точность этого способа зависит от масштаба карты: чем он крупнее, тем выше точность.

К графическому способу можно отнести и определение площади с помощью палеток. Палетки бывают прямолинейные и криволинейные. Они представляют собой системы линий, наносимых на прозрачную основу (целлулоид, стекло, плексиглас).

К прямолинейным палеткам относятся квадратные, состоящие из сетки квадратов (рис. 1), со сторонами, обычно равными 2 мм, и параллельные, состоящие из системы параллельных линий (рис. 2). Эти палетки применяют для определения площадей участков, ограниченных кривыми линиями. При этом палетку накладывают на карту той стороной, где изображена сетка. Чтобы определить площадь палетки, определяют число полных сантиметровых квадратов, ограниченных утолщенными линиями, затем число полных мелких квадратов, и, наконец, путем сложения расположенных на границе участка

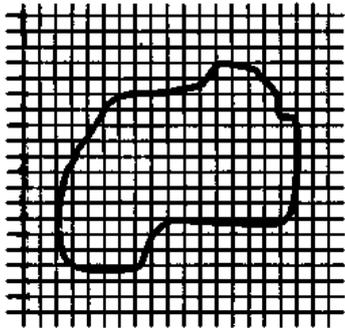


Рис.1. Палетка квадратная.



Рис.2. Палетка параллельная.

частей неполных мелких квадратов (с определением на глаз доли каждой части от полного мелкого квадрата). Последняя операция является наименее точной частью работы с квадратной палеткой. Этой палеткой можно определять площадь с ошибкой до 2%.

Для определения площади параллельной палеткой ее выгодно расположить так, чтобы крайние точки контура находились посередине между двумя линиями палетки. Тогда линии палетки всюду будут являться средними линиями трапеции (основания трапеций будут совпадать с прерывистыми линиями), сумма площадей которых и составит площадь участка. Эта площадь будет равна сумме длин всех средних линий ab , cd , mn , умноженной на расстояние h между линиями, т.е.

$$S = h \cdot (ab + cd + \dots + mn) \quad (1)$$

Длины средних линий измеряют циркулем с помощью поперечного масштаба, выражая их в единицах измерений на местности в соответствии с масштабом плана (карты). Точность определения площади параллельной палеткой выражается десятными долями процентам

Криволинейные палетки строят также в виде системы гипербол (гиперболические палетки) для определения площадей простейших геометрических фигур, однако эти палетки непригодны для определения площадей, ограниченных произвольными кривыми линиями.

3. *Механический* способ определения площади состоит в измерении ее планиметром. Планиметром можно определять площади участков любой формы. Работа с планиметром весьма проста, а точность результатов во многих случаях вполне удовлетворительная.

Наиболее распространенный тип планиметра (рис. 3) состоит из трех частей: полюсного рычага (1), обводного рычага (2) и счетного механизма (3 и 4). К одному концу полюсного рычага прикреплен груз с иглой 7, являющейся полюсом планиметра. На другом конце рычага имеется конический стержень с шарообразной головкой, которая вставляется в гнездо на каретке 3 первого счетного механизма. На одном конце свободного рычага помещены каретки 3 и 4 с двумя одинаковыми счетными механизмами (можно использовать любой из них), а на другом - обводной визир 5 с точкой в кружке и рукоятка 6 для обвода точки по контуру.

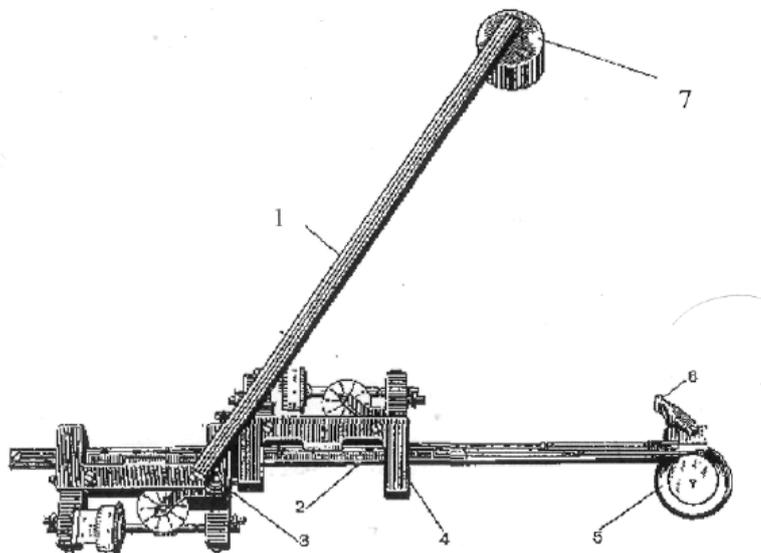


Рис. 3. Полярный планиметр.

1 – полусной рычаг, 2 – обводной рычаг, 3 и 4 – каретки счетного механизма, 5 – обводной визир, 6 – рукоятка, 7 – игла.

Чтобы определить площадь S участка, поставьте обводную часть планиметра в любую точку границы участка, располагая обводной и полусной рычаги приблизительно под прямым углом, и сделайте отчет n_1 по счетному механизму. Затем за ручку держателя 6, вращайте обводной рычаг так, чтобы опорный штифт скользил по бумаге, а точка в кружке обводного визира двигалась по границе участка. Обведя обводной визир по всей границе участка и вернувшись в исходную точку, сделайте второй отчет n_2 . После этого площадь S (при положении полюса вне определяемой площади) вычислите по формуле

$$S = C(n_2 - n_1), \quad (2)$$

где C - цена одного деления планиметра или, иначе, площадь, соответствующая одному делению планиметра.

Для определения цены деления C планиметра тщательно обведите несколько раз фигуру с известной площадью S (дециметровый квадрат координатной сетки плана). В этом случае

$$C = \frac{S}{(n_2 - n_1)}, \quad (3)$$

где $(n_2 - n_1)$ - среднее значение разности начального и конечного отсчетов каждого обвода. В формулах (2) и (3) разность $(n_2 - n_1)$ соответствует обводу по направлению хода часовой стрелки. В случае обвода в обратном направлении разность будет равна $(n_1 - n_2)$.

Счетный механизм планиметра состоит из счетного ролика b , ободка c , циферблата d и верньера a (рис. 4). Главной частью счетного механизма является счетный ролик, ободок которого c при движении обводного визира по контуру катится по бумаге. Поверхность счетного ролика разделена на 100 частей. Точность верньера равна 0,1 деления ролика. Полные обороты ролика отмечаются на циферблате d . Отсчет n по счетному механизму

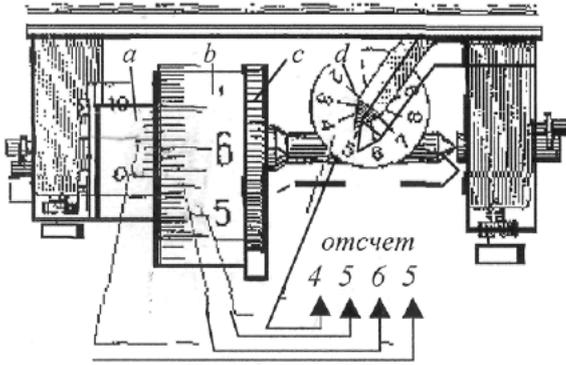


Рис.4. Счетный механизм планиметра.

получают в делениях планиметра, причем одно деление равно $1/1000$ окружности счетного колеса. С такой точностью отсчеты по счетному колесу *b* берутся при помощи верньера *a* (верньер – это дополнительная шкала измерительного инструмента). В общем случае отсчет выражается четырехзначным числом. Первая цифра берется с циферблата *d* (рис. 4), где одно деление соответствует одному полному обороту счетного колеса. Отсчет здесь берется либо по штриху - указателю, нанесенному на скошенном крае выступа, на который опирается ось циферблата, либо по заостренному концу этого выступа. На рис. 4 отсчет по циферблату дает цифру 4 (младшая из двух цифр, между которыми стоит штрих). Две другие цифры отсчета берут со счетного колеса, причем индексом (указателем отсчета) служит нулевой штрих верньера. Первая цифра 5 (индекс стоит между двумя подписанными цифрами 5 и 6, в отсчет записывается младшая из них), вторая цифра 6 (индекс стоит, считая от подписанной цифры 5, между шестым и седьмым штрихами наименьшего деления счетного колеса). Последняя цифра отсчета 5 берется с верньера; это номер штриха верньера, совпадающего со штрихом счетного колеса. Таким образом, отсчет, показанный на рис. 4, равен 4565.

Когда индекс циферблата установится над каким-либо штрихом циферблата или близко к штриху, то из-за наблюдающейся иногда несогласованности показаний циферблата с оборотом счетного колеса возможны просчеты в числе оборотов. Чтобы избежать их, при отсчете по циферблату следует непременно посмотреть, как расположилось счетное колесо относительно нулевого штриха верньера. Если, предположим индекс стоит над штрихом 5, а нулевой штрих счетного колеса все еще находится выше нулевого штриха верньера, то отсчет по циферблату следует записать равным 4, а не 5, так как счетное колесо в своем поступательном движении еще не завершило пятого оборота.

Для контроля и повышения точности определения площади повторите обводы одного и того же участка, соблюдая при этом такой порядок: обведите плоскую фигуру обводным визиром сначала по направлению хода часовой стрелки, затем - против хода. Если расхождение между разностями отсчетов по часовой и против часовой стрелки не больше трех делений, то за результат возьмите их среднее. В противном случае обводы повторите. Эту операцию называют первым полуприемом. Второй полуприем также состоит из двух обводов участка, выполняемых после перемены положения счетного механизма относительно линии, соединяющей обводную иглу и полюс (полюс при этом остается в своем первоначальном положении); если в первом полуприеме счетный механизм был слева от

этой линии, то во втором он должен быть справа.

Среднее из разностей, полученных в двух полуприемах, называют результатом одного приема. Следовательно, чтобы определить площадь одним приемом, нужно выполнить четыре обвода участка.

Особенно тщательно определяется цена деления планиметра - не менее чем одним приемом. Перед определением цены деления запишите длину l обводного рычага, определяя ее по верньеру. За нулевой штрих верньера на обводном рычаге принят его первый штрих от обводной визира. Очень важно знать и помнить, что с изменением длины обводного рычага изменяется и цена деления планиметра, и обводить участок можно только с той же длиной рычага, какая была при определении цены деления.

Выполнение работы

При выполнении работы планиметром необходимо соблюдать следующие условия:

– Стол, на котором будет выполняться работа, должен быть ровным и гладким, а лист плана или карты - хорошо выровненным, натянутым и прикрепленным к столу кнопками.

– Планиметр перед работой следует повернуть: счетные ролики должны вращаться, а их оси не иметь заметных колебаний; зазор между роликом и верньером должен быть минимальным, чтобы не затруднять отсчета; плоскости ободков счетных роликов должны быть перпендикулярны к оси обводного рычага, а оси счетных роликов - параллельны обводному рычагу.

– При обводе углы между рычагами не должен быть меньше 30° и больше 150° . Если размеры участка не позволяют этого добиться, то участок делят на части и площадь каждой части определяют отдельно. Обвод контура делается равномерным плавным движением, без резких толчков и по возможности без остановок.

– При обводе участка следует убедиться, соответствует ли длина свободного рычага той, которая была установлена при определении цены деления планиметра.

– Полюс планиметра должен быть установлен в таком месте, чтобы счетное колесо не сходило при обводе с листа плана.

– Не допускается обводить визиром по линейке вдоль прямолинейных контуров или по лекалу вдоль криволинейных контуров. Во всех без исключения случаях обвод делают от руки.

– Не следует определять планиметром площади очень мелких контуров (менее 1 см^2) или узких вытянутых фигур из-за ненадежности результатов. Площади контуров от 1 до 10 см^2 следует определять способом повторений, т.е. многократным обводом и со взятием только двух отсчетов в начале и конце обвода. Тогда полученную разность отсчетов следует разделить на число обводов контура. Точность результата увеличивается пропорционально корню квадратному из числа обводов.

1. Определите длину обводного рычага l .

2. Для нахождения цены деления счетного ролика обведите фигуру с заранее известной площадью (дециметровый квадрат $S = 100 \text{ см}^2$). По формуле (3) вычислите цену деления при каждом обводе. Полученные данные внесите в табл. 1. Измерения повторите 3 раза.

Таблица 1.

№	$l, \text{ м}$	n_1	n_2	C_1	n_3	n_4	C_2	n_1'	n_2'	C_1'	n_3'	n_4'	C_2'	C_{cp}
1														
2														
3														
Среднее														

n_1 и n_2 - начальный и конечный отсчеты по счетному колесу в первом полуприеме;

n_3 и n_4 - начальный и конечный отсчеты по счетному колесу во втором полуприеме;

C_1 и C_2 - цена деления в первом и во втором полуприемах;

n_1' и n_2' - начальный и конечный отсчеты по счетному колесу в первом полуприеме после перемены положения счетного механизма относительно линии, соединяющей обводной визир и полюс (полюс при этом остается в своем первоначальном положении);

n_3' и n_4' - начальный и конечный отсчеты по счетному колесу во втором полуприеме после перемены положения счетного механизма относительно линии, соединяющей обводную иглу и полюс (полюс при этом остается в своем первоначальном положении);

C_1' и C_2' - цена деления в первом и во втором полуприемах после перемены положения счетного механизма относительно линии, соединяющей обводную иглу и полюс (полюс при этом остается в своем первоначальном положении).

3. По формуле (2) определите площадь круга $S_{экспер}$. Результаты вычислений занесите в табл.2. Вычислите теоретическую площадь круга по формуле $S_{теор} = \pi R^2$ и оцените относительную погрешность ε измерения площади

$$\text{при помощи планиметра } \varepsilon = \frac{|S_{теор} - S_{экспер}|}{S_{теор}} \cdot 100 \%$$

Таблица 2.

№	$l, \text{ м}$	n_1	n_2	S_1	n_3	n_4	S_2	n_1'	n_2'	S_1'	n_3'	n_4'	S_2'	S_{cp}
1														
2														
3														
Среднее $S_{экспер}$														

S_1 и S_2 – площадь круга в первом и во втором полуприемах;

S_1' и S_2' – площадь круга в первом и во втором полуприемах после перемены положения счетного механизма относительно линии, соединяющей обводную

иглу и полюс (полюс при этом остается в своем первоначальном положении).

$S_{экспер}, см^2$	$S_{теор}, см^2$	$\varepsilon, \%$

4. С помощью планиметра определите площадь географической территории (страны) S в $см^2$ и, учитывая масштаб карты, в $км^2$. Результаты измерений представьте в виде табл. 3, аналогичной табл.2. Сравните вычисленную площадь географической территории $S_{экспер}$ с Приложением 4 и оцените величину погрешности ε измерения площади.

Контрольные вопросы:

1. Какими способами можно измерить площадь?
2. В чем заключается принцип определения площади в каждом из способов?
3. Из каких частей состоит планиметр?
4. Как производится отсчет по счетному механизму планиметра?
5. От каких факторов зависит точность измерения площадей планиметром?

Литература:

1. Кудрицкий Д.М. Геодезия. - Л.: Гидрометеиздат, 1982.
2. Демидович Б.П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1978.
3. Советский энциклопедический словарь. – М.: Наука, 1980.

Площади стран Европы и Африки

Европа

№	Страна	Площадь, тыс. км ²	Примечание
1	Албания	28,7	
2	Болгария	110,9	
3	Германия	356,3	
4	Польша	312,7	
5	Венгрия	93,0	
6	Румыния	237,5	
7	Франция	544,0	
8	Испания	503,7	Балеарские о-ва, Канарские о-ва
9	Португалия	92,0	Азорские о-ва, Мадейра
10	Италия	301,0	
11	Финляндия	337,0	
12	Швеция	450,0	
13	Норвегия	324,0	
14	о. Сицилия	25,7	
15	о. Корсика	8,7	
16	о. Сардиния	24,0	
17	Чехия	78,9	в западной части Чехословакии
18	Словакия	49,0	в восточной части Чехословакии
19	Канарские о-ва	7,3	
20	Балеарские о-ва	5,0	
21	Азорские о-ва	2,3	
22	о. Мадейра	0,797	

Африка

№	Страна	Площадь, тыс.км ²	Примечание
1	Алжир	2381,7	
2	Ангола	1247	
3	Берег слоновой кости	322,5	
4	Ботсвана	600,4	
5	Буркина Фасо	274,2	
6	Габон	267,6	
7	Гана	238,5	
8	Гвинея	246,0	

9	Египет	1002	
10	Заир (Демократическая Республика Конго)	2345	
11	Замбия	752,6	
12	Западная Сахара	266,0	
13	Зимбабве	390,6	
14	Камерун	475,4	
15	Кения	582,6	
16	Конго (Народная Республика Конго)	342	
17	Либерия	111,4	
18	Ливия	1760	
19	Мавритания	1030,7	
20	Мадагаскар	590	
21	Малави	119,3	
22	Мали	1204	
23	Марокко	446,5	
24	Мозамбик	783	
25	Намибия	824,3	
26	Нигер	1267	
27	Нигерия	923,8	
28	Сенегал	196,2	
29	Сомали	637,2	
30	Судан	2500	
31	Сьерра Леоне	72,3	
32	Танзания	945,1	
33	Тунис	164	
34	Уганда	236,8	
35	Центральная Африканская Республика	623	
36	Чад	1284	
37	Эфиопия	1221,9	
38	ЮАР	1221	