## Лабораторная работа №6

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ЛИНЕЙНЫХ И ПЛОСКИХ ТЕЛ

**Цель работы:** обучение простейшим приемам нахождения центра тяжести линейных и плоских тел произвольной формы.

**Оборудование:** куски фанеры, отвес, линейка, стержень со съемными грузами, призма.

### Теория

При изучении механики системы материальных точек и твердого тела (его также можно рассматривать как систему материальных точек) одним из основных понятий является понятие *центра масс (центра инерции)*. *Центром масс* системы материальных точек называется точка $C$ ($x_c$, $y_c$, $z_c$), радиус-вектор $\vec{r}_c$ которой связан с массами $m_i$ и радиус-векторами $\vec{r}_i$ всех $N$ точек системы соотношением

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{1}$$

Координаты центра масс $N$ материальных точек находятся по формулам

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{m}, \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{m}, \qquad z_c = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_i z_i}{m}.$$

Положение центра масс не зависит от того, в какой системе координат он определяется, т.е. центр масс является величиной инвариантной. С другой стороны, если радиус-векторы отдельных материальных точек $\vec{r}_i$ отсчитывать относительно центра масс ($\vec{r}_c = 0$), то должно выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = 0 \tag{2}$$

На все тела, расположенные вблизи земной поверхности действует сила тяжести, направление которой близко к направлению центра Земли. Если тело мысленно разбить на $N$ частей малых объемов массой $m_i$ , то на каждую такую часть, принимаемую за материальную точку, будет действовать сила тяжести, пропорциональная ее массе. Тогда, умножая выражение (2) векторно на ускорение свободного падения $\vec{g}$ и учитывая, что произведение $m_i\vec{g}$ определяет силу тяжести $i$-ой точки $\vec{G}_i$, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{g} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{G}_i = 0, \tag{3}$$

т.е. суммарный момент сил тяжести каждой материальной точки, вычисленный относительно центра масс равен нулю (момент силы $\vec{G}_i$

определяется векторным произведением $\vec{r}_i \times \vec{G}_i$). Это означает что, если подвесить тело за точку *C*, то силы тяжести не будут создавать вращающий момент и тело будет находиться в равновесии. В этом случае точку *C* называют центром тяжести (рис. 1).

Рис. 1.

Центр тяжести совпадает с центром масс только при одном условии: силы тяжести, действующие на каждую материальную точку тела, должны быть параллельными. При выводе формулы (3) это автоматически учитывалось отсутствием индекса *i* при $\vec{g}$. Если же тело настолько велико, что становится существенной не параллельность сил тяжести, то точка, в которой должна быть приложена уравновешивающая сила, не совпадает с центром масс. Однако громадные размеры Земли и сравнительно небольшие размеры материальных тел, центры тяжести которых приходится определять, позволяют считать силы тяжести частиц одного тела параллельными между собой. Например, направления сил тяжести двух частиц, находящихся на корме и носу океанского лайнера длиной 300 м, составляют между собой угол в десять секунд дуги, который невозможно даже отметить на чертеже ввиду его малости. Поэтому с очень большой точностью можно принимать силы тяжести различных частиц одного и того же тела за параллельные и прикладывать результирующую силу в центре масс тела.

Следует заметить, что понятие центра масс шире понятия центра тяжести, так как масса не исчезает даже при таких обстоятельствах, при которых вес тела неощутим. Понятие "центр масс" имеет применение во всякой системе материальных точек, тогда как понятие "центр тяжести" выведено для системы сил, приложенных к одному неизменяемому твердому телу.

Очевидно, что как бы мы ни поворачивали тело и ни изменяли его положение по отношению к Земле, силы тяжести его отдельных частей останутся вертикальными и параллельными между собой (вертикаль определяется линией отвеса). Относительно тела они будут просто поворачиваться вокруг своих точек приложения на один и тот же угол. При этом линия действия результирующей силы будет проходить через одну и туже точку – центр тяжести. Отсюда следует, что центр тяжести твердого тела не изменяет своего положения относительно этого тела при изменении положения самого тела (это замечание взято за основу проводимых ниже экспериментов). Положение центра тяжести в теле зависит только от его формы и, если тело неоднородно по плотности, то и от распределения массы. Следует также отметить, что центр масс (как и центр тяжести) это *геометрическая* точка, которая не обязательно находится на самом теле (например, кольцо). Эта искусственно выделенная точка примечательна тем, что к ней приложена равнодействующая сил тяжести тела. Мы будем пользоваться этим в дальнейшем, заменяя действие сил тяжести, приложенных к отдельным частям твердого тела, действием одной силы, приложенной в его центре тяжести и равной его весу.

Рассмотрим основные методы нахождения центра тяжести.

1. *Метод симметрии*. При определении центра тяжести широко используется симметрия тел. Можно доказать, что если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии, или в центре симметрии.

2. *Метод разбиения на части (метод группировки)*. Если сложное тело удается разбить на отдельные части, центры тяжести которых известны, то положение центра тяжести всего однородного тела можно вычислить по формулам

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{N} G_k x_k}{G} = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k x_k}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{N} V_k x_k}{V} \qquad (4)$$

где число слагаемых в каждом из числителей равно числу частей $N$ с объемами $V_k$, на которые разбито тело*;* $V$, $G$- соответственно объем и вес всего тела (для однородного тела $m_k = V_k \rho$, где $\rho$ - плотность). Аналогично находятся координаты $y_c$ и $z_c$. Если тело представляет собой плоскую фигуру, то формулы нахождения центра тяжести аналогичны (4), где вместо объемов берутся соответствующие площади.

Чтобы использовать данный метод нужно знать положения центров тяжести простейших фигур.

Центр тяжести плоского однородного треугольника находится в точке пересечения его медиан, т.е. на расстоянии одной трети высоты треугольника от соответствующего основания:

$$x_c = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_D),\ y_c = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_D),$$

где точки $A$, $B$, $D$ являются вершинами этого треугольника).

Центр тяжести плоского кругового сектора радиуса $R$ с углом раствора $2\alpha$ находится на оси симметрии на расстоянии $x_c = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha}$ от центра круга. Площадь такого сектора $S = \alpha R^2$. Здесь угол $\alpha$ измеряется в радианах. В частности, для полукруга ($\alpha=\pi/2$) из этих формул следует $x_c = \frac{4R}{3\pi}$, $S = \frac{\pi}{2} R^2$.

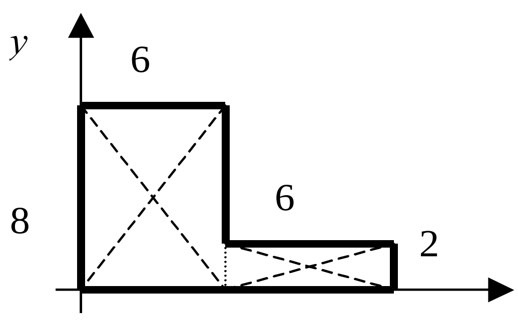

Рис.2.

Для иллюстрации этого метода решим простейшую задачу. Пусть требуется найти центр тяжести плоской фигуры, изображенной на рис. 2.

Разобьем данную фигуру на два прямоугольника размерами

$S_1 = 8 \times 6$ см$^2$ и $S_2 = 2 \times 6$ см$^2$ и воспользуемся формулами (4)

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{2} S_k x_k}{S} = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2}{S_1 + S_2} = \frac{48 \cdot 3 + 12 \cdot 9}{48 + 12} = 4{,}2 \text{ см}$$

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^{2} S_k y_k}{S} = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{S_1 + S_2} = \frac{48 \cdot 4 + 12 \cdot 1}{48 + 12} = 3{,}4 \text{ см}$$

3. *Метод отрицательных масс*. Этот метод удобен при нахождении центра тяжести однородного тела, имеющего пустые полости (вырезы, отверстия) и аналогичен методу разбиения на части. Единственное отличие состоит в том, что масса (соответственно объем или площадь) вырезанной части считается отрицательной.

Например, нужно найти центр тяжести диска радиуса $R$, из которого вырезан круг радиуса $r=R/2$, край которого проходит через центр диска (рис. 3). Так как ось $x$ (начало которой совместим с центром диска) является осью симметрии, то центр тяжести находится на этой оси. Разобьем плоскую фигуру на две части: 1- сплошной диск (без выреза) и 2 – круг радиуса $r$, площадь которого будем считать отрицательной. Тогда в соответствии с (4), получаем

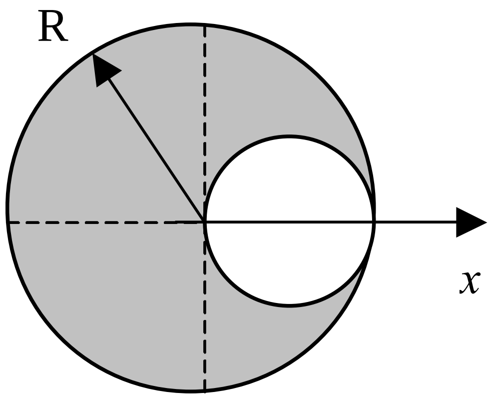

Рис.3.

$$x_c = \frac{S_1 x_1 + (-S_2) x_2}{S_1 + (-S_2)} = \frac{\pi R^2 \cdot 0 - \pi \frac{R^2}{4} \cdot \frac{R}{2}}{\pi R^2 - \pi \frac{R^2}{4}} = -\frac{1}{6} R$$

4. *Метод Паппа*. Этот метод основан на теореме александрийского математика Паппа, жившего в 3 веке н. э. Суть этой теоремы в следующем: объем тела вращения, описанного плоской фигурой, вращающейся вокруг оси, расположенной в плоскости фигуры и не пересекающей ее контура, равен произведению площади фигуры на длину пути, описанного ее центром тяжести.

Например, требуется найти центр тяжести полукруга. Пусть $R$ – радиус полукруга, а $x_c$ – расстояние центра тяжести от прямолинейно границы полукруга. Вращая его вокруг этого края как вокруг оси, мы получим шар. При этом центр тяжести проходит расстояние $2\pi x_c$, площадь полукруга равна $\pi R^2/2$, а объем полученного шара $4\pi R^3/3$. Тогда в соответствии с теоремой Паппа, находим $2\pi x_c \cdot \left(\frac{1}{2}\pi R^2\right) = \frac{4\pi R^3}{3}$, откуда получаем уже известную формулу $x_c = \frac{4R}{3\pi}$.

5. *Метод интегрирования*. Если тело нельзя разбить на несколько конечных частей, положения центров тяжести которых известно, то тело разбивают на малые объемы $\Delta V_к$ устремляя их к нулю, а число $N$ к бесконечности. В результате такого предельного перехода формулы (4) преобразуются к определенным интегралам:

Для объемных тел: $$x_c = \frac{1}{V}\int\limits_{(V)} x dV = \frac{1}{V}\iiint\limits_{(V)} x dx dy dz,$$

Для плоских тел: $$x_c = \frac{1}{S}\int\limits_{(S)} x dS = \frac{1}{S}\iint\limits_{(S)} x dx dy$$

Аналогичные выражения можно записать и для других координат. Математическая техника вычисления координат центра тяжести относится к области курсов высшей математики (там подобные задачи служат хорошими примерами по интегральному исчислению и здесь рассматриваться не будут).

6. *Экспериментальный метод.* Если тело имеет неправильную форму, неоднородно, содержит произвольные пустоты, вырезы, то теоретический расчет положения центра тяжести затруднителен. В этом случае положение центра тяжести проще всего найти экспериментально.

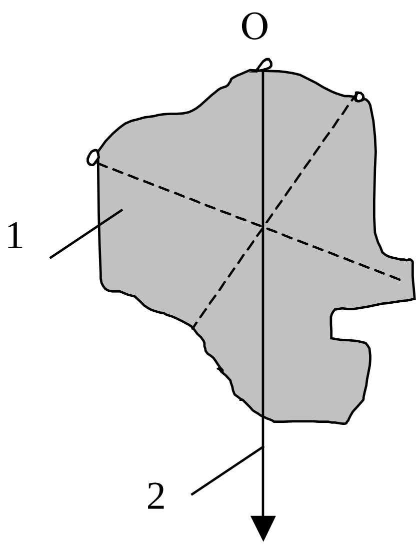

Рис. 4.

Пусть, например, требуется найти центр тяжести куска фанеры 1 (рис. 4) произвольной формы. Подвесим его за небольшой крючок вместе с отвесом 2 в точке О. Очевидно, в положении равновесия центр тяжести тела должен лежать на линии отвеса, иначе сила тяжести будет создавать момент относительно точки подвеса, который бы начал вращать тело. Поэтому, проводя по куску фанеры прямую вдоль линии отвеса, можем утверждать, что центр тяжести находится на этой прямой. Подвешивая тело в разных точках и, проводя вертикальные прямые, мы убедимся, что все они пересекутся в одной точке. Эта точка и будет определять центр тяжести данного тела.

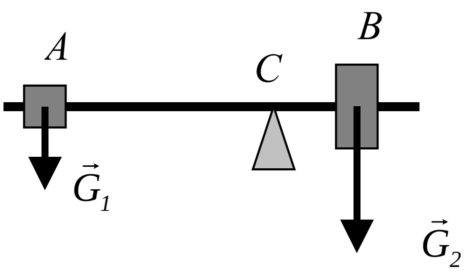

Рис. 5.

Если сложное тело имеет ось симметрии (например, стержень с нанизанными цилиндрическими телами), то для определения центра тяжести достаточно установить стержень на острие небольшой призмы и найти точку на стержне, опираясь на которую стержень будет занимать горизонтальное положение (рис. 5). Найденный таким образом центр тяжести делит расстояние между двумя массами в отношении обратном отношению масс

$$\frac{G_1}{G_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{CB}{CA}. \qquad (5)$$

## Порядок выполнения работы

1. Определите координаты центра тяжести ($x_c^{экс}$, $y_c^{экс}$) простейшей плоской фигуры, выданной преподавателем, используя экспериментальный метод.

2. Перерисуйте плоскую фигуру в тетрадь, разбейте ее на простые фигуры (квадрат, прямоугольник, треугольник, круг и т.д.) и, применяя метод разбиения на части и метод отрицательных масс, вычислите теоретические координаты центра тяжести ($x_c^{теор}$, $y_c^{теор}$).

3. Укажите на рисунке теоретические и экспериментальные координаты центра тяжести. Найдите относительную и абсолютную величины расхождения между теоретическими $x_c^{теор}$ и экспериментальными $x_c^{экс}$ координатами центра тяжести, используя формулы

$$\varepsilon_x=\frac{\left|x_c^{теор}-x_c^{экс}\right|}{x_c^{экс}}\cdot 100\%; \quad \Delta x_c=x_c^{экс}\cdot\varepsilon_x$$

$$\varepsilon_y=\frac{\left|y_c^{теор}-y_c^{экс}\right|}{y_c^{экс}}\cdot 100\%; \quad \Delta y_c=y_c^{экс}\cdot\varepsilon_y$$

2. Определите координаты центра тяжести линейной фигуры (стержнь с нанизанными цилиндрическими телами). Проверьте справедливость отношения (5) для различных масс и положений тел *A* и *B*. Установите, при каком условии на это отношение не будет влиять масса однородного стержня? Почему?

## Контрольные вопросы:

1. В чем сходство и различие между силой притяжения, силой тяжести, весом?
2. В чем сходство и различие между центром тяжести и центром масс тела?
3. Какие существуют способы определения центра масс?

## Литература:


1. И.В. Савельев. Курс общей физики, т.1. - М.: Наука, 1973.
2. С.П. Стрелков. Механика. - М.: Наука, 1965.
3. С.Э. Хайкин. Физические основы механики. - М.: Наука, 1971.
4. Р. Фейнман, и др. Фейнмановские лекции по физике. Том 2. - М.: Мир, 1967.
5. Дудникова Н.И., Мищенко С.С., Чен Б.Б. Обработка результатов физического эксперимента. Методическое пособие. - Бишкек: КРСУ, 1999.