Лабораторная работа №7

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ И ПРОВЕРКА ТЕОРЕМЫ ГЮЙГЕНСА-ШТЕЙНЕРА МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы: определение моментов инерции тел с помощью трифилярного подвеса и проверка теоремы Гюйгенса - Штейнера.

Оборудование: трифилярный подвес, секундомер, набор грузов, измерительная линейка.

Теория

Момент инерции тела I относительно оси есть физическая величина, являющаяся мерой инертности тела во вращательном движении вокруг этой оси и равная

$$I = \int_m r^2 dm.$$

где r – расстояние элемента массы dm до оси вращения. Интегрирование проводится по всей массе тела m.

Момент инерции тела относительно какой-либо оси можно найти вычислением или измерить экспериментально, например, с помощью трифилярного подвеса.

Трифилярный подвес (рис.1) представляет собой круглую платформу, подвешенную на трех симметрично расположенных нитях, укрепленных у краев этой платформы. Наверху эти нити так же симметрично прикреплены к диску меньшего диаметра. Платформа может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси, перпендикулярной к ее плоскости и проходящей через ее центр тяжести, который перемещается вдоль оси вращения. Период колебаний определяется величиной момента инерции платформы; он будет другим, если платформу нагрузить каким - либо телом; этим и пользуются в настоящей работе.

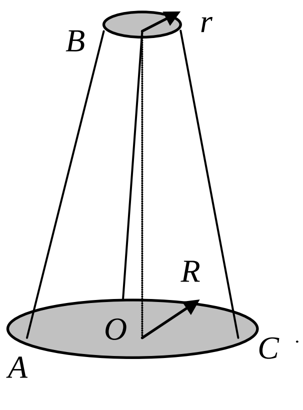

Рис. 1.

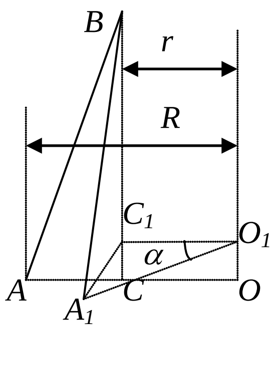

Рис. 2.

Если платформа массой m, вращаясь в одном направлении, поднялась на высоту h, то приращение ее потенциальной энергии будет равно:

$$E_1 = mgh,$$

где g - ускорение силы тяжести. Вращаясь в другом направлении, платформа придет в положение равновесия с кинетической энергией, равной

$$E_2 = \frac{1}{2} I \omega_0^2,$$

где I - момент инерции платформы, ω_0 - угловая скорость платформы в момент достижения ею положения равновесия. Пренебрегая работой сил трения, на основании закона сохранения механической энергии имеем

$$E_1 = E_2, \qquad mgh = \frac{1}{2} I\omega_0^2 . \tag{1}$$

Считая, что платформа совершает гармонические колебания зависимость углового смещения платформы от времени запишется в виде $\varphi = \alpha \cos\frac{2\pi}{T}t$, где φ - угловое смещение платформы, α - амплитуда смещения, T - период колебаний, t - текущее время.

Угловая скорость ω, являющаяся первой производной углового смещения φ по времени, выражается так:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{2\pi\alpha}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t .$$

В момент прохождения через положение равновесия ($t = \frac{1}{4}T, \frac{3}{4}T, \frac{5}{4}T, ...$) абсолютное значение этой величины будет равно

$$\omega_0 = \frac{2\pi\alpha}{T} . \tag{2}$$

На основании формул (1) и (2) имеем

$$mgh = \frac{1}{2} I\left(\frac{2\pi\alpha}{T}\right)^2 . \tag{3}$$

Если l - длина нитей подвеса, R - расстояние от центра платформы до точек крепления нитей на ней, r - радиус верхнего диска, то легко видеть (рис.2), что

$$h = OO_1 = BC - BC_1 = \frac{BC^2 - BC_1^2}{BC + BC_1} .$$

Так как $$BC^2 = AB^2 - AC^2 = l^2 - (R - r)^2 ,$$

$$BC_1^2 = A_1B^2 - A_1C_1^2 = l^2 - \left(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha\right),$$

то $$h = \frac{2Rr(1-\cos\alpha)}{BC + BC_1} = \frac{4Rr\sin^2\frac{\alpha}{2}}{BC + BC_1} .$$

Синус малых углов отклонения можно заменить значением угла α, а величину знаменателя, при выполнении условия $(R - r) << BC$, положить равной $2l$. Учитывая это, получим $h = \frac{Rr\alpha^2}{2l}$.

Подставляя в (3), найдем

$$mg\frac{Rr\alpha^2}{2l} = \frac{1}{2} I\left(\frac{2\pi\alpha}{T}\right)^2 .$$

Откуда

$$I = \frac{mgRr}{4\pi^2 l}T^2 . \tag{4}$$

Так как все величины в правой части формулы (4) могут быть непосредственно измерены, она может быть использована для экспериментального определения момента инерции платформы.

Выполнение работы

1. Определение момента инерции пустой платформы.

С помощью штангенциркуля и измерительной линейки найдите радиус нижней платформы *R*, радиус верхней платформы *r* и длину нитей *l*. Масса платформы m_0 в *г* выгравирована на ее нижней поверхности. Повернув платформу на небольшой угол, при помощи секундомера измерьте время t_0 некоторого числа полных колебаний (n_0=50 - 100). Данное количество колебаний дает возможность достаточно точно определить величину периода колебаний $T_0 = \frac{t_0}{n_0}$. По (4) найдите момент инерции пустой платформы I_0. Измерения повторите 5 раз. Результаты вычислений занесите в табл.1.

R, м	*r*, м	*l*, м

Таблица 1

№	t_0, *с*	n_0	T_0, *с*	m_0, *кг*	I_0, *кг·м*^{2}	ΔI_0, *кг·м*^{2}	*ε*, %
1							
2							
3							
4							
5							
Ср.							

2. Определение момента инерции исследуемого тела.

Взвесив исследуемое тело, найдите его массу m_1. Поместите тело в центр платформы и вновь определите период колебаний *T* системы. Воспользовавшись (4), вычислите момент инерции всей системы *I*, принимая ее массу *m* равной сумме масс тела и платформы $m = m_0 + m_1$. Величина момента инерции тела I_1 определяется как разность моментов инерции системы *I* и платформы I_0

$$I_1 = I - \bar{I}_0 ,$$

где $\bar{I}_0$ - среднее значение момента инерции пустой платформы. Измерения повторите 5 раз. Результаты занесите в табл. 2.

Таблица 2.

№	t_1, *с*	n_1	T_1, *с*	m_1, *кг*	$m=m_0+m_1$, *кг*	*I*, *кг·м*^{2}	I_1, *кг·м*^{2}	ΔI, *кг·м*^{2}	*ε*, %
1									
2									
3									

4									
5									
Ср.									

3. Проверка теоремы Гюйгенса-Штейнера.

Для проверки теоремы Гюйгенса - Штейнера при помощи трифилярного подвеса необходимы два одинаковых тела. Взвесив грузы, определите суммарную массу этих тел m_2. Положив два груза один на другой в центр платформы измерьте период колебаний T_2 системы. По (4) вычислите момент инерции обоих тел вместе с платформой I. Момент инерции двух грузов $I_{оси}$ относительно оси, проходящей через их центр масс равен

$$I_{оси} = I - \bar{I}_0,$$

где $\bar{I}_0$ - среднее значение момента инерции пустой платформы.

Измерения повторите 5 раз. Результаты внесите в табл.3.

Таблица 3.

№	t_2, с	n_2	T_2, с	m_2, кг	$m=m_0+m_2$ кг	I, кг·м^2	$I_{оси}$, кг·м^2	$\Delta I_{оси}$, кг·м^2	ε, %
1									
2									
3									
4									
5									
Ср.									

Расположите оба тела симметрично относительно центра платформы на расстоянии d от него. Тела кладите на платформу строго симметрично, так, чтобы не было перекоса платформы. Для этого на платформе нанесены концентрические окружности на определенном расстоянии друг от друга. Найдите период колебаний T_3 и момент инерции I системы. Экспериментально найденный момент инерции двух тел относительно оси, находящейся на расстоянии d от центра масс каждого тела, вычислите по формуле

$$I_{экспер} = I - \bar{I}_0.$$

Измерения повторите 5 раз. Результаты занесите в табл.4.

Таблица 4.

№	t_3, с	n_3	T_3, с	m_2, кг	$m=m_0+m_2$, кг	I, кг·м^2	$I_{экспер}$, кг·м^2	$\Delta I_{экспер}$, кг·м^2	ε, %
1									
2									
3									
4									
5									
Ср.									

Согласно теореме Гюйгенса – Штейнера момент инерции I тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями: Следовательно, теоретический момент инерции двух тел $I_{теор}$ относительно оси, проходящей через центр платформы, равен сумме момента инерции тел относительно оси, проходящей через их центр масс $\bar{I}_{оси}$, и произведения массы грузов m_2 на квадрат расстояния d между осями:

$$I_{теор} = \bar{I}_{оси} + m_2 d^2, \tag{5}$$

где $\bar{I}_{оси}$ - среднее значение момента инерции тел относительно оси, проходящей через их центр масс (берется из табл. 3), d - расстояние от центра масс груза до центра платформы..

Сравните результаты расчета по (5) со средним значением $I_{экспер}$ из табл.4. Найдите относительную погрешность измерения момента инерции по формуле:

$$\varepsilon = \frac{\left|\bar{I}_{экспер} - I_{теор}\right|}{I_{теор}} \cdot 100\%.$$

$\bar{I}_{экспер}$, $кг \cdot м^2$	$I_{теор}$, $кг \cdot м^2$	ε, %

Контрольные вопросы:

1. При каких упрощающих условиях получена формула (4)?
2. Какие факторы ограничивают точность опытов?
3. Можно ли пользоваться предложенным методом для определения моментов инерции тел в том случае, если ось вращения платформы не проходит через центр тяжести?
4. Сформулируйте и докажите теорему Гюйгенса - Штейнера.

Литература:

1. Савельев И.В. Курс общей физики, Т.1 Механика, колебания и волны, молекулярная физика. - М.: Наука, 1973.
2. Стрелков С.П.. Механика. - М.: Наука, 1975.
3. Хайкин С.Э. Физические основы механики - М.: Наука, 1971.