Лабораторная работа №8

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НА МАЯТНИКЕ ОБЕРБЕКА

Цель работы: изучение и экспериментальная проверка закономерностей вращательного движения, оценка влияния трения на точность результатов проведенных измерений.

Оборудование: крестообразный маятник Обербека, набор перегрузков, секундомер, измерительная линейка, штангенциркуль.

Теория

В работе экспериментально проверяются закономерности уравнения моментов для вращения маятника вокруг неподвижной оси

$$I\beta = M_{внеш} \tag{1}$$

где I - момент инерции маятника относительно оси вращения, β - проекция углового ускорения на ось вращения, $M_{внеш}$ - сумма проекций на ось вращения моментов внешних сил. Исследуется влияние изменения момента внешних сил при постоянном моменте инерции маятника (I = *const)* и изменения момента инерции маятника при постоянном моменте внешних сил ($M_{внеш}$ = *const)* на характеристики вращательного движения.

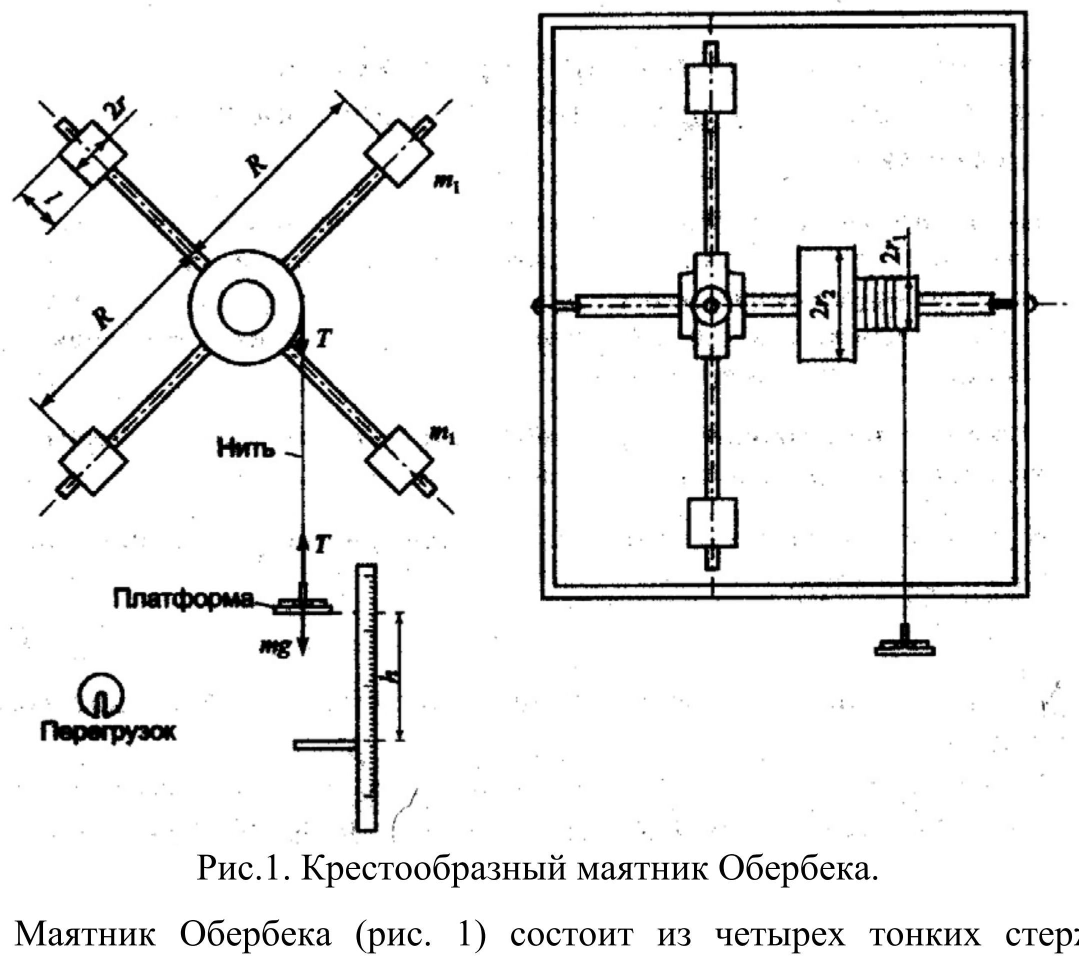

Рис.1. Крестообразный маятник Обербека.

Маятник Обербека (рис. 1) состоит из четырех тонких стержней, укрепленных на втулке под прямым углом друг к другу. На стержнях находятся грузы массой m_1 каждый. Втулка и два шкива различных радиусов r_1 и r_2 насажены на общую ось. Ось закреплена в подшипниках, так что вся система может вращаться вокруг горизонтальной оси.

Передвигая грузы m_1 вдоль стержней, можно изменять момент инерции I маятника. На один из шкивов навита тонкая нить, к которой привязана платформа известной массы для размещения перегрузков. Вращающий момент создается силой натяжения нити T:

$$M = rT, \tag{2}$$

где r - радиус шкива (r равен r_1 или r_2). Силу T легко найти из уравнения движения платформы с перегрузком:

$$ma = mg - T, \tag{3}$$

где m - масса платформы с перегрузком, a - ее ускорение. Ускорение a связано с угловым ускорением β соотношением

$$\beta = \frac{a}{r}. \tag{4}$$

Из формул (2) и (3) получим, что момент силы натяжения нити равен

$$M = rT = m(g-a)r. \tag{5}$$

В натурных опытах необходимо учитывать действие на вращательное движение маятника Обербека силы трения в оси. Момент силы трения $M_{тр}$ может оказаться достаточно большим и исказить результаты опыта. Уменьшение влияния этого момента за счет увеличения массы m перегрузков неэффективно, потому что увеличение массы m

1. ведет к увеличению давления на ось, что вызывает возрастание сил трения ($M_{тр} = \mu N r$, где N – сила давления на ось маятника, μ- коэффициент трения, r - плечо силы трения);
2. уменьшает время t падения платформы и, следовательно, ухудшает точность измерения времени движения.

Момент сил трения снижается благодаря креплению оси маятника в подшипниках, однако влияние трения ощутимо и должно приниматься во внимание при обработке результатов опытов. С учетом действия сил трения, (4), (5) уравнение (1) запишется в виде:будет иметь вид:

$$\frac{Ia}{r} = m(g-a)r - M_{тр}, \tag{6}$$

$$a = \frac{\frac{gmr^2}{I} - \frac{M_{тр} \cdot r}{I}}{1 + \frac{mr^2}{I}}. \tag{7}$$

Ускорение a можно найти, измеряя время t, в течение которого нагруженная платформа из начального состояния опускается на расстояние h:

$$a = \frac{2h}{t^2}. \tag{8}$$

Согласно теореме Гюйгенса – Штейнера, момент инерции I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_0

относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр инерции тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями. Поэтому момент инерции, входящий в (7), может быть записан в виде

$$I = I_0 + 4m_1R^2, \tag{9}$$

где R - расстояние центров грузов m_1 до оси вращения, при R=0 $I = I_0$ - момент инерции системы без грузов m_1.

В (7) входит также соотношение

$$\frac{mr^2}{I} = \frac{mr^2}{I_0 + 4m_1R^2},$$

которое в условиях опыта меньше или порядка 10^{-2}. Поэтому пренебрегая этой величиной в знаменателе выражения (7), получим формулу, которую можно проверить экспериментально:

$$\beta = \frac{a}{r} = \frac{mgr - M_{тр}}{I} = \frac{1}{I}mgr - \frac{M_{тр}}{I} \tag{10}$$

Согласно (10), при неизменном моменте инерции тела I угловое ускорение β пропорционально вращающему моменту $M = mgr$.

Экспериментальная часть работы состоит из двух частей.

В первой исследуется вращательное движение маятника под действием различных перегрузков при постоянном моменте инерции системы (положение грузов m_1 фиксировано). По результатам исследования строится экспериментальная зависимость углового ускорения β от момента внешней силы $M=mgr$. Если на оси ординат откладывать угловое ускорение β, а на оси абсцисс - mgr, то, согласно (10) и с учетом погрешностей, экспериментальные точки должны группироваться около прямой линии (рис.2). Уравнение прямой устанавливается аппроксимацией методом наименьших квадратов. Угловой коэффициент уравнения этой прямой равен $1/I$, а точка пересечения с осью абсцисс дает $M_{тр}$.

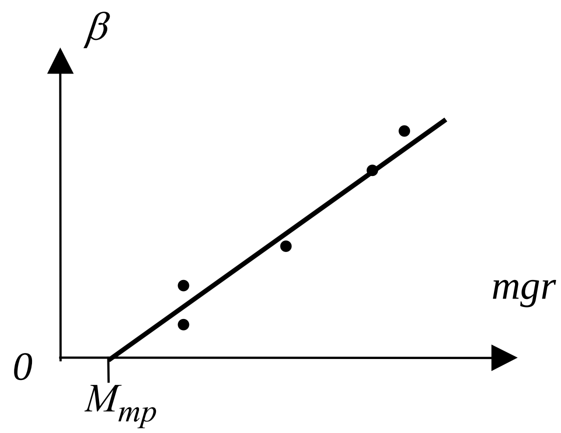

Рис.2. Зависимость $\beta = f(mgr)$.

Во второй части лабораторной работы измеряются характеристики вращательного движения маятника при пяти значениях момента инерции системы и постоянном моменте внешней силы $M_{внеш} = const$. Момент инерции маятника варьируют, изменяя расстояние R центров масс грузов до оси вращения.

Преобразуем соотношение (10), пренебрегая в нем малой величиной момента силы трения $M_{тр}$ по сравнению с моментом mgr и применяя теорему Гюйгенса – Штейнера $I(R) = I_0 + 4m_1R^2$:

$$\beta = \frac{a}{r} = \frac{mgr - M_{тр}}{I} = \frac{mgr}{I_0 + 4m_1R^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{g}{a} = \frac{I_0 + 4m_1R^2}{mr^2} = \frac{4m_1}{m} \cdot \left(\frac{R}{r}\right)^2 + \frac{I_0}{mr^2} \qquad (11)$$

Для исследования влияния изменения момента инерции маятника при постоянном момента внешних сил на характеристики вращательного движения необходимо, выбрав постоянную массу m груза, измерить время t его движения и по формуле (8) найти ускорение a при различных положениях R грузов m_1 на спицах. Результаты измерений представляются в виде точек на координатной плоскости xy, где $x = \left(\frac{R}{r}\right)^2$, $y = \frac{g}{a}$ (рис.3). Если экспериментальные точки в пределах точности измерений ложатся на прямую, то подтверждается зависимость (11), а, следовательно, и основное уравнение динамики вращательного движения.

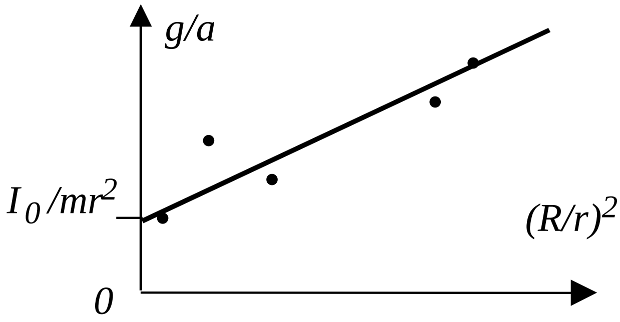

Рис.3. Зависимость $\frac{g}{a} = f\left(\left(\frac{R}{r}\right)^2\right)$.

Отметим, что при выводе формулы (11) пренебрегают моментом сил трения, т.е. считается, что $M_{тр} << mgr$. Значение $M_{тр}$ берется из графика зависимости $\beta = \beta\ (mgr)$ при $R = const$. Это позволяет выбрать массу перегрузка так, чтобы неравенство $mgr >> M_{тр}$ заведомо выполнялось.

Роль момента сил трения можно оценить и иначе. Для этого заметим, что если маятник начинает вращается с угловой скоростью ω_0, то к моменту остановки он повернется на угол $\varphi = 2\pi n$, связь между которыми устанавливается законом сохранения энергии:

$$\frac{I\omega_0^2}{2} = A_{тр} = M_{тр} \cdot \varphi = 2\pi n \cdot M_{тр}, \qquad (12)$$

где n - полное число оборотов, которое делает маятник до остановки, $\frac{I\omega_0^2}{2}$ - начальная кинетическая энергия вращающегося маятника, $A_{тр}$ - работа сил трения. Момент сил трения является постоянной величиной и связан с угловым ускорением соотношением

$$I\beta_0 = M_{тр}, \qquad (13)$$

где β_0 - ускорение, определяемое только моментом сил трения.

Из (12) и (13) получаем

$$\omega_0^2 = 2\beta_0\varphi. \qquad (14)$$

Пусть $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ - период обращения маятника в начале движения, тогда (14) запишется в виде:

$$\beta_0 = \frac{\pi}{nT_0^2}\,. \qquad (15)$$

Для экспериментального определения β_0 необходимо измерить время T_0, за которое маятник Обербека совершает первый оборот, и полное число n оборотов маятника до остановки. При всех дальнейших измерениях нужно следить, чтобы выполнялось неравенство $\beta_0 << \beta$.

Порядок выполнения работы:

1. Сбалансируйте маятник. Для этого оставьте на крестовине два груза на двух противоположных спицах на равных расстояниях от оси вращения. Спицы, на которых находятся грузы, соединены с втулкой резьбой. Вращая спицы в резьбе, добейтесь равновесия. Затем точно сбалансируйте грузы на второй паре спиц на таком же расстоянии от оси вращения. Полезно несколько раз привести маятник во вращение, каждый раз давая ему возможность остановиться. Подумайте, как на основании этих опытов определить, хорошо ли сбалансирован маятник.
2. Определите приближено минимальную массу m_0 перегрузка, при которой маятник начинает вращаться, и оцените величину момента сил трения из соотношения:

$$M_{тр} = m_0\,gr,$$

где r - радиус шкива, на котором подвешен груз.

3. Оцените угловое ускорение β_0 маятника. Для этого приведите его во вращение, измерьте время T_0, за которое он совершает первый оборот, и полное число оборотов n маятника до полной остановки. Затем по (15) вычислите β_0 . Измерения повторите три раза и возьмите среднее значение β_0. Результаты измерения занесите в табл.1.

Таблица 1.

m_0, кг	r, м	$M_{тр}$, Н·м	T_0, с	n	β_0, с$^{-2}$	$\beta_{0\ сред}$, с$^{-2}$

4. Найдите экспериментальную зависимость углового ускорения β маятника от момента приложенной силы mgr при постоянном моменте инерции маятника $I = const$. Для этого измерьте время t, за которое груз m падает с высоты h. Опыт повторите три раза.
5. Найдите средние значение времени падения и ускорения груза по формулам:

$$t_{ср} = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}$$

$$a_{ср} = \frac{2h}{t_{ср}^2}.$$

6. Угловое ускорение вычислите по (4) $\beta_{ср} = \dfrac{a_{ср}}{r}$.

7. Все измерения и вычисления повторите для пяти значений массы m груза, причем для всех m должно выполняться неравенство $m >> m_0$, где m_0 - масса перегрузка. Результаты измерений занесите в табл. 2.

Таблица 2.

№	m, кг	mgr, Н·м	h, м	t_1, с	t_2, с	t_3, с	$t_{ср}$, с	$a_{ср}$, м/с^2	$\beta_{ср}$, 1/с^2
1									
…									
5									

Результаты эксперимента представьте в виде экспериментальных точек с абсциссами mgr и ординатами β (рис.2). Приблизьте совокупность точек прямой и вычислите момент инерции системы I и момент силы трения $M_{тр}$.

5. Экспериментально проверьте зависимость обратного линейного ускорения a от момента инерции маятника при постоянном моменте внешней силы $M_{внеш} = const$. Для этого, взяв постоянную массу груза $m >> m_0$, определите ускорение a груза при пяти различных положениях R грузов m_1 на спицах. В каждом положении R измерения времени падения t груза m с высоты h повторите три раза. Результаты измерений занесите в табл. 3, где $a_{ср} = \dfrac{2h}{t_{ср}^2}$ и $\beta_{ср} = \dfrac{a_{ср}}{r}$.

6. Полученные экспериментальные точки отложите с учетом погрешностей в координатной плоскости xy, где $x = \left(\dfrac{R}{r}\right)^2$, $y = \dfrac{g}{a}$ и постройте график зависимости $\dfrac{g}{a} = f\left(\left(\dfrac{R}{r}\right)^2\right)$(рис.3).

Таблица 3.

№	R, м	$\left(\frac{R}{r}\right)^2$	h, м	t_1, с	t_2, с	t_3, с	$t_{ср}$, с	$a_{ср}$, м/с^2	$\beta_{ср}$, 1/с^2	$\frac{g}{a_{ср}}$
1										
…										
5										

По графику определите $\dfrac{I_0}{mr^2}$ (пересечение линейной зависимости с осью ординат) и момент инерции системы I_0 без грузов. Результаты занесите в табл. 4.

Таблица 4.

m, кг	r, м	$\frac{I_0}{mr^2}$	I_0, кг·м^2

Контрольные вопросы:

1. Перечислите кинематические характеристики вращательного движения твердого тела. Укажите их физический смысл и единицы измерения.
2. Перечислите динамические характеристики вращательного движения твердого тела.
3. Что называется моментом силы относительно точки вращения?
4. Что называется моментом силы относительно оси вращения?
5. Как найти направление вектора момента силы?
6. Дайте определение момента инерции материальной точки, твердого тела. Каковы единицы измерения этой величины?
7. Сформулируйте и докажите теорему Гюйгенса - Штейнера.
8. Сформулируйте основное уравнение динамики вращательного движения.
9. Поясните принцип проверки основного уравнения вращательного движения тела.

Литература:

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1. Механика. - М.: Наука, 1989.
2. Стрелков С.П. Механика. – М.: Наука, 1975.
3. Савельев И.В. Курс физики. Т.1. - М.: Наука, 1987.
4. Хайкин С.Э. Физические основы механики. М.: Наука, 1971.
5. Дудникова Н.И., Мищенко С.С., Чен Б.Б. Обработка результатов физического эксперимента. Методическое пособие /Издательство КРСУ – Бишкек, 1999.