Лабораторная работа № 9

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА

Цель работы: изучение закона сохранения энергии и определение момента инерции маятника Максвелла.

Оборудование: маятник Максвелла, штангенциркуль, секундомер, линейка.

Теория

Момент инерции I - физическая величина, характеризующая инертность тела при его вращательном движении.

Моментом инерции материальной точки относительно данной оси называется величина

$$I = mr^2 ,$$

где m - масса материальной точки, r - расстояние от точки до оси.

Момент инерции тела равен сумме моментов инерции его отдельных материальных точек, т.е.

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 ,$$

где m_i - масса i - й точки, r_i - расстояние i - й точки до оси, n - число всех материальных точек, составляющих данное тело.

Моменты инерции относительно оси симметрии Ox однородных тел простой формы массы m :

1. Момент инерции тонкостенного кольца (обруча) радиусом R:

$$I_x = mR^2$$

2. Момент инерции диска (цилиндра) радиусом R:

$$I_x = \frac{1}{2} mR^2 .$$

3. Момент инерции тонкостенного кольца (обруча) радиусом R:

$$I_x = \frac{1}{2} m \left(R^2 - r^2 \right)$$

Кинетическая энергия вращательного движения $E_к$ тела вокруг оси Ox равна

$$E_к = \frac{I_x \omega_x^2}{2} ,$$

где ω_x - значение проекции угловой скорости вращения тела на ось Ox.

Маятник Максвелла (рис.1) представляет собой ролик 1, жестко закрепленный на осевом стержне 2 и висящий на двух нитях 3, прикрепленных к опоре 4. Вращая маятник вокруг оси и наматывая нити на осевой стержень, можно поднять его на некоторую высоту h.

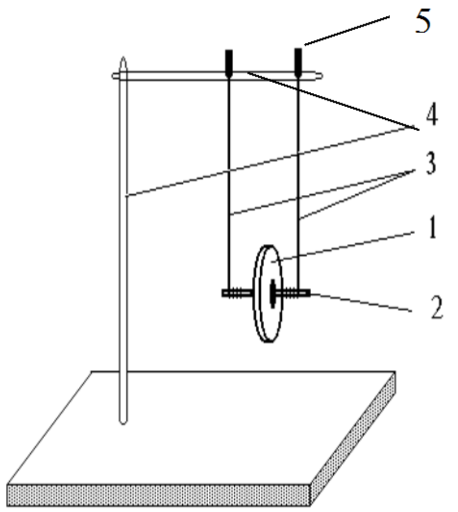

Рис. 1.

Маятник удерживается в верхнем положении зажимом 5. В этом случае маятник массой *m* будет иметь потенциальную энергию *mgh* (g=9,8 м/с^2 - ускорение свободного падения). Предоставленный затем самому себе маятник начнет раскручиваться и его потенциальная энергия будет переходить в кинетическую энергию поступательного $\frac{m\text{v}^2}{2}$ и вращательного $\frac{I_x\omega_x^2}{2}$ движений.

На основании закона сохранения механической энергии имеем равенство потенциальной энергии в начальный момент времени и кинетической энергии в крайнем нижнем положении в момент времени *t*:

$$mgh = \frac{m\text{v}^2}{2} + \frac{I_x\omega_x^2}{2}, \tag{1}$$

где I_x - момент инерции маятника относительно оси *Ox*, совпадающей с его осью; v, ω_x – линейная и угловая скорости оси маятника в момент времени *t*.

Раскручивание нитей с осевого стержня маятника совершается обычно без проскальзывания. Поэтому $\text{v} = r\omega_x$, где $r = d/2$ - радиус осевого стержня; *d* - его диаметр.

Маятник опускается с ускорением *a*, отличающимся от *g* ($a<g$ из-за натяжения нитей). Тогда основные кинематические соотношения в момент времени *t*, запишутся так:

$$\text{v} = \omega_x r; \quad h = \frac{at^2}{2}; \quad \text{v} = \frac{2h}{t}; \quad \omega_x = \frac{2h}{tr}.$$

Подставляя значения v, ω_x в формулу (1), получим выражение для определения момента инерции маятника:

$$mgh = \frac{4mh^2}{2t^2} + \frac{4I_x h^2}{2t^2r^2} = \frac{2mh^2}{t^2} + \frac{8I_x h^2}{t^2d^2},$$

откуда:

$$I_x = \frac{md^2}{4}\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right), \tag{2}$$

Масса маятника, определяется по формуле

$$m = m_о + m_р\,, \tag{3}$$

где m_o - масса оси (стержня) маятника; m_p - масса ролика.

С помощью формулы (2), измерив время *t* и высоту *h*, можно экспериментально определить значение момента инерции маятника I_x.

С другой стороны, значение момента инерции маятника можно найти теоретически по формуле:

$$I_{x\ теор} = I_{ox} + I_{px}\,, \tag{4}$$

где I_{ox} - момент инерции оси маятника; I_{px} - момент инерции ролика.

Осью маятника является стальной стержень диаметром d и высотой h_o. Его масса m_o и момент инерции I_{ox} равны:

$$m_o = \frac{\pi d^2 h_0}{4}\rho_0,$$

$$I_{ox} = \frac{1}{2}m_o r^2 = \frac{1}{8}m_0 d^2,$$

где ρ_o = 7,7 г/см^3 – плотность стали.

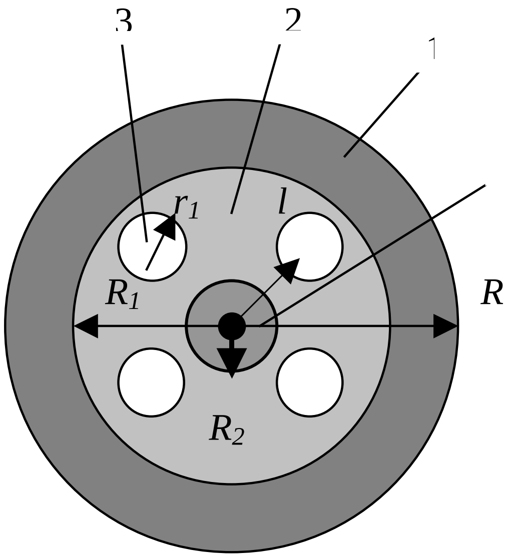

Рис. 2.

Для расчета I_{px}, представим алюминиевый ролик в виде совокупности следующих тел (рис. 2):

1 - кольцо с внешним R и внутренним R_1 радиусами, высотой h_1, массой $m_1 = \pi\left(R^2 - R_1^2\right)h_1\rho$ и моментом инерции $I_{1x} = \frac{m_1}{2}\left(R^2 + R_1^2\right)$;

2 – кольцо с внешним R_1 и внутренним r радиусами, высотой h_2, массой m_2 и моментом инерции I_{2x}:

$$m_2 = \pi\left(R_1^2 - r^2\right)h_2\rho$$

$$I_{2x} = \frac{m_2}{2}\left(R_1^2 + r^2\right);$$

3 – четыре вырезанных диска с центрами на расстоянии l от оси маятника, каждый массой m_3, высотой h_3 и радиусом r_1. Масса m_3 и момент инерции I_{3x} вырезанного диска с учетом теоремы Гюйгенса-Штейнера равны

$$m_3 = \pi r_1^2 h_3\rho$$

$$I_{3x} = \frac{m_3}{2}r_1^2 + m_3 l^2;$$

4 – две кольцевые насадки, каждая из которых имеет внутренний r, внешний R_2 радиусы и высоту h_4. Масса m_4 и момент инерции I_{4x} насадки равны

$$m_4 = \pi\left(R_2^2 - r^2\right)h_4\rho$$

$$I_{4x} = \frac{m_4}{2}\left(r^2 + R_2^2\right).$$

Плотность алюминия ρ = 2,6 г/см^3.

Тогда масса m_p и момент инерции I_{px} ролика равны:

$$m_p = m_1 + m_2 - 4m_3 + 2m_4,$$

$$I_{px} = I_{1x} + I_{2x} - 4I_{3x} + 2I_{4x}.$$

Сравнивая $I_{xтеор}$ и I_x, вычисленные по формулам (2), (4), можно найти относительную погрешность измерений момента инерции по формуле

$$\varepsilon = \frac{\left| I_{теор} - \overline{I_x} \right|}{\overline{I_x}} \cdot 100\,\%$$

где $\overline{I}_x$ - среднее значение момента инерции.

Абсолютная погрешность определяется формулой

$$\Delta I_x = \overline{I_x} \cdot \varepsilon\,.$$

Порядок выполнения работы

1. Ознакомьтесь с экспериментальной установкой, и подготовьте ее к работе.
2. Штангенциркулем измерьте r, r_1,, R, R_1, R_2 , l, h_1, h_2, h_3, h_4, h_o.
3. По формуле (3) вычислите массу маятника и покажите численное значение массы преподавателю.
4. Измерьте величину h.
5. Намотайте на ось маятника нить подвески и зафиксируйте его при помощи зажима.
6. Определите время падения маятника с высоты h.
7. По формуле (2) определите экспериментальный момент инерции маятника I_x.
8. Измерения повторите 5 раз.
9. Вычислите значение теоретического момента инерции $I_{x\ теор}$ по формуле (4).
10. Рассчитайте относительную погрешность ε.
11. Результаты измерений оформите в СИ и занесите в табл. 1.
12. Определите доверительный интервал значений момента инерции I_x, задав доверительную вероятность.

Таблица 1.

№	t, с	h, м	I_x, кг·м^2	$I_{x\ теор}$, кг·м^2	ΔI_x, кг·м^2	ε, %
1						
…						
5						
Сред.						

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте закон сохранения механической энергии.
2. Дайте определение момента инерции для точки и твердого тела.
3. Запишите уравнение движения тела при поступательном и вращательном движении.
4. Выведите расчетную формулу для вычисления момента инерции маятника Максвелла.
5. Почему линейная скорость маятника определяется по формуле $v = \frac{2h}{t}$?
6. Оцените погрешность в определении момента инерции маятника Максвелла обусловленную толщиной нити подвеса.

Литература:

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1. Механика. - М.: Наука, 1989.
2. Савельев И.В. Курс физики. Т.1. – М.: Высш.шк., 1989.
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики.- М., 1989.